Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

2. série — k-díry, půlící přímky a nakreslení grafů

odevzdat do 13. 4. 2021

1. Nechť X je konečná neprázdná množina bodů v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počty k-děr v X splňují následující identity:

   (a) $\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot \#k\text{-děr} = -1,$ **[2]**

   (b) Pokud $|X| \geq 2$, pak

   $$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot k \cdot \#k\text{-děr} = -\#\text{bodů uvnitř } \operatorname{conv}(X).$$

   [2]

   Nápověda: posouvání bodů po křivkách do vhodné konfigurace.

2. Nechť X je n-bodová množina v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počet 4-děr v X je minimálně kvadratický v n. **[2]**

3. Nechť P je konečná množina bodů v rovině ne nutně v obecné poloze, která neobsahuje 5-díru. Dokažte, že pak každý konvexní 5-úhelník Q určený body z P obsahuje alespoň jeden bod z P v uzavřeném „vnitřním“ pětiúhelníku určeném úhlopříčkami Q. **[2]**

4. Nechť n je sudé a P je množina n bodů v obecné poloze v rovině. Nechť $k \leq n/2$ a h je přímka, která neprochází žádným bodem P a rozděluje rovinu na dvě poloroviny obsahující k a $n-k$ bodů z P. Ukažte, že h protíná přesně k půlících úseček P. **[2]**

5. Nechť P je množina n bodů v obecné poloze v rovině. Řekneme, že dvojice bodů z P je *k-hrana*, pokud přímka určená těmito dvěma body odděluje z množiny P přesně k bodů v jedné otevřené polorovině. Označme $E_k(P)$ počet k-hran v P. Dále označme $\overline{cr}(P)$ počet čtveřic bodů z P v konvexní poloze.

   Dokažte následující identitu:

   $$\overline{cr}(P) = 3\binom{n}{4} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} E_k(P) \cdot k \cdot (n-k-2).$$

   Nápověda: spočítejte dvěma způsoby počet trojic $(a, \overline{bc}, d)$, kde a, b, c, d jsou různé body z P, a leží vlevo od přímky $\overline{bc}$ a d leží vpravo od $\overline{bc}$. **[2]**

6. Hrany grafu jsou *nezávislé* pokud nemají společný vrchol. O *nakreslení* grafu předpokládáme, že hrany mají jen konečný počet společných bodů a každý společný bod hran kromě společného vrcholu je křížení.

   Rozhodněte, pro které volby n a m platí, že $K_{m,n}$ má v každém nakreslení v rovině celkem lichý počet křížení nezávislých dvojic hran.

   Nápověda: co se změní při spojitém deformování hran? **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`