

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série — Erdősova–Szekeressova věta

nápověda 17. 3. 2021, odevzdat do 23. 3. 2021

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. (a) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina s $n(k)$ body v rovině obsahuje k bodů v *obecné poloze* (žádné tři body z dané množiny neleží na společné přímce) nebo k bodů na společné přímce. [2]
(b) Zkuste předešlé tvrzení dokázat s $n(k)$ nanejvýš polynomiálně velkým vzhledem ke k . [1]
2. (a) Dokažte Erdősovu–Szekeressovu větu v \mathbb{R}^d : pro každé $d \geq 3$ a $k \in \mathbb{N}$ existuje $n = n_d(k) \in \mathbb{N}$ takové, že v každé množině s alespoň n body z \mathbb{R}^d v *obecné poloze* (žádných $m + 2$ bodů z dané množiny neleží v afinním podprostoru dimenze m , pro $m = 1, 2, \dots, d - 1$) lze najít podmnožinu velikosti k v konvexní poloze. [2]
(b) Ukažte, že každá dostatečně velká množina bodů v \mathbb{R}^3 v obecné poloze obsahuje 7-díru. [2]
3. Nechť P je množina $3n - 1$ bodů v rovině v konvexní poloze. Každá uzavřená úsečka mezi dvěma body z P je obarvena buď červeně nebo modře. Dokažte, že existuje n červených navzájem disjunktních úseček nebo n modrých navzájem disjunktních úseček. [3]
4. Dokažte, že pro dostatečně velkou absolutní konstantu C platí, že $n \times n$ mřížka $\{(i, j); i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}$ neobsahuje podmnožinu v konvexní poloze s více než $Cn^{2/3}$ body. [4, nápověda]
5. Dokažte, že 2^h -bodová Hortonova množina pro $h \geq 1$ neobsahuje podmnožinu v konvexní poloze s více než $4h$ body. [2]

Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/kvg>