Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

1. série — Konvexní množiny

nápověda 20.10.2020, odevzdat do 26.10.2020

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. Najděte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, která je sjednocením dvou konvexních množin a jejíž doplněk se skládá z 5 navzájem oddělených oblastí (přesněji komponent souvislosti). **[2]**

2. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu nebo část postupu jejího důkazu). **[2]**

3. Uvažujme množinu $2d + 2$ bodů $M = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{d+1}, y_{d+1}\}$ v $\mathbb{R}^d$. Dokažte, že M se dá rozdělit na dvě podmnožiny A a B, z nichž každá obsahuje pro každé $i = 1, 2, \ldots, d+1$ právě jeden bod z $\{x_i, y_i\}$, tak, aby se konvexní obaly A a B protínaly. (Můžete využít toho, že $(d+1)$-tice vektorů $x_i - y_i$ je lineárně závislá a poté postupovat podobně jako v důkaze Radonovy věty.) **[2]**

4. Nechť M je konečná množina alespoň čtyř bodů v rovině, z nichž některé jsou červené a zbylé jsou modré. Navíc platí, že pro libovolnou čtveřici V bodů z M existuje přímka, která ostře odděluje červené body z V od modrých bodů z V. Dokažte, že pak existuje přímka ostře oddělující všechny červené body z M od všech modrých bodů z M. **[3]**

5. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{d+1}$ jsou konečné množiny bodů z $\mathbb{R}^d$ takové, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$ počátek leží v $\mathrm{conv}(X_i)$. Dokažte, že potom existují body $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$, takové, že počátek leží v $\mathrm{conv}(\{x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}\})$. **[4, nápověda]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`