Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

3. série — simpliciální komplexy

odevzdat do 2. 5. 2018

V následujících úlohách pro jednoduchost nerozlišujeme abstraktní a geometrické simpliciální komplexy a považujeme je za stejný objekt.

1. Nechť D je nakreslení grafu K_4 v rovině, v němž se sousední hrany nekříží. Ukažte, že pak nějaké dvě nezávislé hrany v D se také nekříží. **[2]**

2. Definujme *šachovnicový* simpliciální komplex $\check{S}_{3,4}$ tak, že jeho vrcholy jsou políčka šachovnice 3×4, a simplexy jsou tvořeny podmnožinami políček, která neleží ve stejném řádku ani sloupci (a tedy věže na ně postavené se neohrožují). Rozhodněte, kterému z následujících 2-rozměrných topologických prostorů je $|\check{S}_{3,4}|$ homeomorfní: sféra, torus, projektivní rovina, Kleinova lahev, jiný. **[2]**

3. Nechť $n, d \in \mathbb{N}$ a $\gamma(t) = (t, t^2, \ldots, t^d), t \in \mathbb{R}$ je momentová křivka v $\mathbb{R}^d$. Nechť $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ a $v_i = \gamma(t_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou různé body seřazené v tomto pořadí na momentové křivce. Obarvěme nějaké body v_i modře a zbylé červeně. Popište kombinatoricky, při kterých obarveních je průnik konvexního obalu červených bodů a konvexního obalu modrých bodů neprázdný. Můžete bez důkazu použít znalosti z předmětu KVG I. **[3]**

4. (a) Dokažte, že $\Delta_{2k+2}^{(k)}$ nejde po částech lineárně vnořit do $\mathbb{R}^{2k}$. Postupujte podobně jako při důkazu nerovinnosti K_5; můžete využívat tvrzení z přednášky, jejichž důkaz byl jen naznačen. **[3]**

   (b) Podobně dokažte, že ani spojení $k + 1$ kopií 3-bodového komplexu D_3 nejde po částech lineárně vnořit do $\mathbb{R}^{2k}$. **[1]**

5. Dokažte, že simpliciální komplex tvořící hranici pravidelného osmistěnu není nervem žádného systému 6 konvexních množin v $\mathbb{R}^2$. **[3]**