Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

2. série — Věty Hellyho typu a věta o sendviči

nápověda 7.11.2017, odevzdat do 14.11.2017

1. Nechť $C_1, \dots, C_n$ je soubor alespoň tří konvexních množin v rovině a nechť K je úsečka $[0,1] \times \{0\}$. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z $C_1, \dots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K, potom také průnik všech $C_1, \dots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K. **[2]**

2. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřený mnohoúhelník o ploše $S(M)$, ne nutně konvexní. Dokažte, že existuje bod $x \in \mathbb{R}^2$ takový, že libovolná přímka jím procházející dělí M na dvě části o ploše alespoň $S(M)/3$. **[2]**

3. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p,q)-*vlastnost*, pokud $n \geq p$ a z každé p-tice z $\mathcal{C}$ lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. *Špendlíkovost* $s(\mathcal{C})$ souboru množin $\mathcal{C}$ je velikost nejmenší množiny bodů $X \subset \mathbb{R}^2$ takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň jeden bod z X.

   (a) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s $(2,2)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) = 1$. **[2]**

   (b) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků se $(4,3)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. **[3]**

4. Mějme soubor $C_1, \dots, C_n$ konvexních množin v rovině, $n \geq 4$. Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z $C_1, \dots, C_n$ obsahuje polopřímku, potom průnik všech $C_1, \dots, C_n$ obsahuje polopřímku. **[4, nápověda]**

5. Věta o sendviči říká, že pro disjunktní konečné množiny $A_1, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ existuje nadrovina h taková, že každý jí určený otevřený poloprostor obsahuje nanejvýš $\left\lfloor \frac{|A_i|}{2} \right\rfloor$ bodů z každého A_i.

   Nechť $A_1, A_2, \dots, A_d$ jsou disjunktní množiny v $\mathbb{R}^d$ takové, že každá A_i obsahuje n bodů a body z $\bigcup_{i=1}^d A_i$ jsou v obecné poloze (tj. žádná nadrovina neobsahuje víc než d bodů z tohoto sjednocení). Ukažte, že potom lze body z $\bigcup_{i=1}^d A_i$ rozdělit do n *duhových* d-tic (tj. množin $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, kde $x_i \in A_i$), jejichž konvexní obaly jsou disjunktní.

   Chcete-li použít jinou verzi věty o sendviči než tu uvedenou v zadání, nejdříve ji dokažte. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`