Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série — bonusová

odevzdat do 10. 2. 2017

1. Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech buněk (stěn maximální dimenze) arrangementu množiny n přímek v rovině. Dokažte, že $\sum_{C\in\mathcal{C}} f_0(C)^2 = O(n^2)$, kde $f_0(C)$ je počet vrcholů buňky C. **[3]**

2. Nechť S je množina n geometrických útvarů v rovině. *Průnikový graf* S je graf na n vrcholech, které odpovídají útvarům z S. Dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když jim odpovídající útvary mají neprázdný průnik.

   (a) Všech grafů na n vrcholech je $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n^2/2+O(n)}$. Dokažte, že průnikových grafů n úseček v rovině je jenom $2^{O(n\log n)}$. (Pozor na kolineární úsečky!) Použijte větu o počtu znaménkových kombinací. **[3]**

   (b) Dokažte, že průnikových grafů n křivek v rovině je alespoň $2^{\Omega(n^2)}$. Pokud chcete, můžete místo pro n křivek řešit úlohu pro n konvexních množin. **[3]**

3. Nechť $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ je množina n bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodu x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   (a) Ukažte, že maximální počet různých „výhledů“ je $O(n^4)$. **[2]**

   (b) Ukažte, že odhad v předchozím bodě nelze obecně zlepšit. **[3]**

4. Ukažte, že pro každé kladné iracionální číslo α existuje nekonečně mnoho dvojic čísel $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$
   Můžete využít větu 2.1.3 ze skript. **[1]**

5. Dokažte, že pro $\alpha = \sqrt{2}$ existuje jen konečně mnoho dvojic $m, n \in \mathbb{N}$ splňujících
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{4n^2}.$$
   [3]

6. Nechť α_1, α_2 jsou reálná čísla. Dokažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \le N$, taková, že
$$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}}, \;\; i = 1, 2.$$
   [3]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`