Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

4. série

odevzdat do 23.5.2016 (6. příklad do 30.5.2016), nápověda 23.5.2016

Erdősův problém různých vzdáleností

1. Nechť P je množina n bodů v $\mathbb{R}^2$ tvořící $g < n/\log n$ různých vzdáleností. Ukažte, že potom existuje $\Omega(n^4/g)$ čtveřic (a, b, c, d), které splňují následující vlastnosti: **[3]**
   - a, b, c, d jsou čtyři různé body náležící do P,
   - přímka ac není rovnoběžná s přímkou bd,
   - vzdálenost $|ab|$ se rovná vzdálenosti $|cd|$.

2. Nechť L je množina n přímek v $\mathbb{R}^3$ takových, že žádné tři neprocházejí týmž bodem a žádné tři neleží ve společné rovině. Určete přesně maximální počet dvojic protínajících se přímek v L. **[3]**

3. Nechť P je množina n bodů v $\mathbb{R}^2$ a nechť L je množina přímek $l_{x\to y}$, $x, y \in P$ a $x \neq y$, určených následující parametrizací. Dva různé body $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in P$ zobrazíme na přímku
$$l_{x\to y} = \left\{ \left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, 0 \right) + t \left(\frac{y_2 - x_2}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2}, 1 \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$
   (neboli se jedná o parametrizaci, která byla uvedena na přednášce).

   Dokažte, že potom nejvýše $O(n)$ přímek z L leží v téže rovině. **[2]**

4. Nechť L je množina n^2 přímek v $\mathbb{R}^3$ a nechť R je množina $O(n)$ rovin taková, že pro každou přímku l z L existuje rovina z R obsahující l. Nechť je navíc v každé rovině z R obsaženo nejvýše $O(n)$ přímek z L. Ukažte, že potom počet průsečíků určených přímkami z L je nejvýš $O(n^3)$. **[2]**

5. Dokažte, že je-li $p \in \mathbb{R}[x, y]$ nenulový polynom stupně nanejvýš D, tak potom $Z(p)$ obsahuje nanejvýš D přímek. **[2]**

6. Pro ireducibilní polynom $p \in \mathbb{R}[x, y]$ stupně d nazveme množinu $Z(p)$ *ireducibilní rovinnou křivkou stupně d*. Nechť b, k, C jsou konstanty, P množina m bodů v rovině a nechť Γ je soubor n ireducibilních rovinných křivek stupně nejvýš b takových, že pro každých k různých bodů z roviny existuje nanejvýš C různých křivek z Γ, které všemi těmito body procházejí.

   Dokažte, že počet incidencí $I(P, \Gamma)$ mezi P a Γ je nanejvýš
$$O(m^{k/(2k-1)} n^{(2k-2)/(2k-1)} + m + n).$$

   Při řešení můžete použít následující verzi *Bézoutovy věty*: Nechť $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$ jsou polynomy stupňů D_p a a D_q. Je-li počet řešení systému $p = 0 = q$ konečný, pak jich je nanejvýš $D_p D_q$. Je-li počet řešení systému $p = 0 = q$ nekonečný, pak p a q mají netriviální společný faktor. **[4+nápověda]**