

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

## 3. série

odevzdat do 2.5.2016

### Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti

Maximální možnou délku Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti řádu  $s$  nad symboly  $1, 2, 3, \dots, n$  budeme značit  $\lambda_s(n)$ . Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů nebo hran ležících na hranici buňky (počítaný i s násobností).

1. Dokažte, že počet Davenportových–Schinzelových posloupností řádu 2 nad abecedou  $\{1, \dots, n\}$ , které mají délku  $2n - 1$ , a v nichž nejlevější výskyty symbolů tvoří rostoucí posloupnost, je roven Catalanovu číslu  $C_{n-1}$ . Catalanova čísla jsou definována jako  $C_0 = 1$  a  $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$  pro  $n \geq 1$ . Např. pro  $n = 3$  máme dvě posloupnosti: 12321 a 12131. [2]
2. Složitost jedné buňky arrangementu úseček  
Nechť  $C$  je buňka arrangementu  $n$  úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.
  - (a) Úsečky očíslováme čísly 1 až  $n$ . Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky  $C$ , počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost  $ababab$ , a tedy složitost buňky  $C$  je  $O(\lambda_4(n))$ . [2]
  - (b) Dokažte, že složitost buňky  $C$  je nejvýše  $O(\lambda_3(n))$ . Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. [2]
3. Věta o zóně přes Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti  
Zóna přímky  $p$  v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí  $p$ . Dokažte převodem na Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti, že zóna jedné přímky v arrangementu  $n$  přímek v rovině má složitost  $O(n)$ . [3]
4. Nechť  $g_1, g_2, \dots, g_m$  jsou grafy  $m$  spojitých po částech lineárních funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ , které se dohromady skládají z  $n$  úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka  $g_1, g_2, \dots, g_m$  má složitost  $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$ . Konkrétně pro  $m = O(1)$  je složitost dolní obálky lineární. [2]
5. Definujme matice

$$N := \begin{pmatrix} * & 1 & * & 1 \\ 1 & * & 1 & * \end{pmatrix}, \quad L := \begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix},$$

kde  $*$  zastupuje libovolný prvek. Nechť  $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$  je matice  $n \times n$  složená z nul a jedniček.

- (a) Dokažte, že pokud  $A$  neobsahuje  $N$  jako podmatici, pak má nejvýše  $\lambda_3(n) + O(n)$  jedniček. [2]
- (b) Dokažte, že pokud  $A$  neobsahuje  $L$  jako podmatici, pak má nejvýše  $O(n)$  jedniček. [1]
- (c) Najděte matici  $A$  obsahující alespoň  $\Omega(n \log(n))$  jedniček, která neobsahuje  $U$  jako podmatici. [2]