Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

2. série — k-díry a půlící přímky

odevzdat do 11. 4. 2016

1. Nechť X je konečná neprázdná množina bodů v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počty k-děr v X splňují následující identity:

   (a) $\sum_{k=1}^{|X|}(-1)^k \cdot \#k\text{-děr} = -1,$ **[2]**

   (b) Pokud $|X| \geq 2$, pak

   $$\sum_{k=1}^{|X|}(-1)^k \cdot k \cdot \#k\text{-děr} = -\#\text{bodů uvnitř } \operatorname{conv}(X).$$

   [2]

   Nápověda: posouvání bodů po křivkách do vhodné konfigurace.

2. Nechť X je n-bodová množina v obecné poloze v rovině. Dokažte, že počet 4-děr v X je minimálně kvadratický v n. **[2]**

3. Nechť n je sudé a P je množina n bodů v obecné poloze v rovině. Nechť $k \leq n/2$ a h je přímka, která neprochází žádným bodem P a rozděluje rovinu na dvě poloroviny obsahující k a $n-k$ bodů z P. Ukažte, že h protíná přesně k půlících úseček P. **[2]**

4. Nechť P je množina $2n+1$ bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^3$, žádné se stejnou souřadnicí z. Označme body P ve směru rostoucí souřadnice z (tj. odspoda nahoru) postupně $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$. S použitím výsledku předchozího příkladu ukažte, že pokud $k \leq n$ a p_{k+1} je vrchol $\operatorname{conv}(P)$, pak existuje přesně k *půlících trojúhelníků*, u kterých p_{k+1} je ve vertikálním směru prostřední vrchol. (Trojúhelník je půlící, pokud nadrovina jím procházející rozdělí P na stejně velké části). **[3]**

5. Nechť P je množina n bodů v obecné poloze v rovině. Řekneme, že dvojice bodů z P je k-*hrana*, pokud přímka určená těmito dvěma body odděluje z množiny P přesně k bodů v jedné otevřené polorovině. Označme $E_k(P)$ počet k-hran v P. Dále označme $\overline{cr}(P)$ počet čtveřic bodů z P v konvexní poloze.

   Dokažte následující identitu:

   $$\overline{cr}(P) = 3\binom{n}{4} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} E_k(P) \cdot k \cdot (n-k-2).$$

   Nápověda: spočítejte dvěma způsoby počet trojic $(a, \overline{bc}, d)$, kde a, b, c, d jsou různé body z P, a leží vlevo od přímky $\overline{bc}$ a d leží vpravo od $\overline{bc}$. **[3]**