Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série — Erdősova–Szekeresova věta

nápověda 14. 3. 2016, odevzdat do 21. 3. 2016

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. (a) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n(k) \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina s $n(k)$ body v rovině obsahuje buď k bodů v *obecné poloze* (žádné tři body z dané množiny neleží na společné přímce) nebo obsahuje k bodů na společné přímce. **[2]**

   (b) Zkuste předešlé tvrzení dokázat s $n(k)$ nanejvýš polynomiálně velkým vzhledem ke k. **[1]**

2. (a) Dokažte Erdősovu–Szekeresovu větu v $\mathbb{R}^d$: pro každé $d \geq 3$ a $k \in \mathbb{N}$ existuje $n = n_d(k) \in \mathbb{N}$ takové, že v každé množině s alespoň n body z $\mathbb{R}^d$ v *obecné poloze* (žádných $m + 2$ bodů z dané množiny neleží v afinním prostoru dimenze $m = 1, 2, \ldots, d - 1$) lze najít podmnožinu velikosti k v konvexní poloze. **[2]**

   (b) Ukažte, že každá dostatečně velká množina bodů v $\mathbb{R}^3$ v obecné poloze obsahuje 7-díru. **[2]**

3. Nechť P je množina $3n - 1$ bodů v rovině v konvexní poloze. Každá uzavřená úsečka mezi dvěma body z P je obarvena buď červeně nebo modře. Dokažte, že existuje buď n červených navzájem disjunktních úseček nebo n modrých navzájem disjunktních úseček. **[3]**

4. Dokažte, že množina $\{(i, j) : i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ neobsahuje podmnožinu v konvexní poloze, která by měla více než $Cn^{2/3}$ bodů pro nějakou absolutní konstantu C. **[4, nápověda]**

5. Dokažte, že 2^h-bodová Hortonova množina pro $h \geq 1$ neobsahuje podmnožinu v konvexní poloze, která by měla více než $4h$ bodů. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`