Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série — bonusová

odevzdat do 16. 2. 2016

1. Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech buněk (stěn maximální dimenze) arrangementu množiny n přímek v rovině. Dokažte, že $\sum_{C\in\mathcal{C}} f_0(C)^2 = O(n^2)$, kde $f_0(C)$ je počet vrcholů buňky C. **[3]**

2. Nechť S je množina n geometrických útvarů v rovině. *Průnikový graf* S je graf na n vrcholech, které odpovídají útvarům z S. Dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když jim odpovídající útvary mají neprázdný průnik.

   (a) Všech grafů na n vrcholech je $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n^2/2+O(n)}$. Dokažte, že průnikových grafů n úseček v rovině je jenom $2^{O(n\log n)}$. (Pozor na kolineární úsečky!) Použijte větu o počtu znaménkových kombinací. **[3]**

   (b) Dokažte, že průnikových grafů n křivek v rovině je alespoň $2^{\Omega(n^2)}$. Pokud chcete, můžete místo pro n křivek řešit úlohu pro n konvexních množin. **[3]**

3. Dokažte, že pro pevné d je v arrangementu n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ nejvýše $O(n^{d-1})$ *neomezených* buněk. **[2]**

4. (a) Kolik je buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají rovnicím $x_i = x_j$, kde $1 \le i < j \le d$? **[3]**

   (b) Kolik je buněk v arrangementu nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají rovnicím $x_i + x_j = 0$ a $x_i = x_j$, kde $1 \le i < j \le d$? **[2]**

5. Ukažte, že pro každé kladné iracionální číslo α existuje nekonečně mnoho dvojic čísel $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$
   Využijte větu 2.1.3 ze skript. **[1]**

6. Dokažte, že pro $\alpha = \sqrt{2}$ existuje jen konečně mnoho dvojic $m, n \in \mathbb{N}$ splňujících
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{4n^2}.$$
   [3]

7. Nechť α_1, α_2 jsou reálná čísla. Dokažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \le N$, taková, že
$$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}}, \quad i = 1, 2.$$
   [3]