Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série — Dualita a mnohostěny

nápověda 15. 12. 2015, odevzdat do 22. 12. 2015

1. Pro množinu $C \subseteq \mathbb{R}^d$ ukažte, že $C = C^*$ právě tehdy, když C je uzavřená jednotková koule se středem v počátku. **[2]**

2. Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\operatorname{conv}(X \cup \{0\})$. **[2]**

3. Nechť $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$. Uvažujme konvexní obal C polopřímek $p_1, \ldots, p_n$ začínajících v počátku a určených těmito vektory (tedy $p_i = \{x \in \mathbb{R}^n; x = \lambda v_i, \lambda \geq 0\}$).

   Dokažte, že v C existuje polopřímka, která s každou polopřímkou p_i svírá ostrý úhel. **[3]**

4. Uvažme n úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech n úseček lze protnout jednou přímkou. (Protnout znamená mít společný alespoň jeden bod, tj. přímka obsahující úsečku ji i protíná.) **[3]**

5. Nalezněte kompaktní konvexní množinu $C \subseteq \mathbb{R}^3$, pro kterou není $\operatorname{ex}(C) = \{x \in C; \operatorname{conv}(C \setminus \{x\}) \neq C\}$ uzavřená. **[3]**

6. Dokažte, že každý polytop $P \subset \mathbb{R}^d$ je kolmou projekcí nějakého k-rozměrného pravidelného simplexu v $\mathbb{R}^n$, pro vhodná k, n. (*Kolmou projekcí* rozumíme zobrazení π z prostoru $\mathbb{R}^n$ na podprostor $M \cong \mathbb{R}^d$ vnořený v $\mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\pi(x) - x$ kolmý na M.) **[4+nápověda]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`