Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

1. série — Konvexní množiny

nápověda 27.10.2015, odevzdat do 3.11.2015

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. Najděte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, která je sjednocením dvou konvexních množin a jejíž doplněk se skládá z 5 navzájem oddělených oblastí (přesněji komponent souvislosti). **[2]**
2. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu nebo část postupu jejího důkazu). **[2]**
3. Uvažujme množinu $2d + 2$ bodů $M = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{d+1}, y_{d+1}\}$ v $\mathbb{R}^d$. Dokažte, že M se dá rozdělit na dvě podmnožiny A a B, z nichž každá obsahuje právě jeden bod z $\{x_i, y_i\}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, d+1$ tak, aby se konvexní obaly A a B protínaly. (Můžete využít toho, že $(d+1)$-ice vektorů $x_i - y_i$ je lineárně závislá a poté postupovat podobně jako v důkaze Radonovy věty.) **[2]**
4. Množina bodů P *propichuje trojúhelníky* množiny bodů M, pokud každý trojúhelník určený trojicí bodů z M obsahuje ve svém vnitřku aspoň jeden bod z P. Dokažte, že pro každou n-bodovou $M \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze (žádné tři body neleží na společné přímce) lze najít množinu P s $2n - 5$ body propichující trojúhelníky M. **[3]**
5. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{d+1}$ jsou konečné množiny bodů z $\mathbb{R}^d$ takové, že počátek leží v $\mathrm{conv}(X_i)$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$. Dokažte, že potom existují body $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$, takové, že počátek leží v $\mathrm{conv}(\{x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}\})$. **[4, nápověda]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`