

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

## IV. série – Davenport-Schinzelovy posloupnosti

nápověda 12.5.2014, odevzdat do 19.5.2014

Maximální možnou délku Davenport-Schinzelovy posloupnosti řádu  $s$  nad symboly  $1, 2, 3, \dots, n$  budeme značit  $\lambda_s(n)$ . Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů a hran ležících na hranici buňky.

1. Složitost jedné buňky arrangementu úseček

Nechť  $C$  je buňka arrangementu  $n$  úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.

(a) Úsečky očíslovme čísly 1 až  $n$ . Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky  $C$ , počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost  $ababab$ , a tedy složitost buňky  $C$  je  $O(\lambda_4(n))$ . [2]

(b) Najděte příklad, kde se v posloupnosti z první části příkladu vyskytuje  $ababa$  (a to bez ohledu na volbu počátečního vrcholu). [1]

(c) Dokažte, že složitost buňky  $C$  je nejvýše  $O(\lambda_3(n))$ . Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. [3]

2. Věta o zóně přes Davenport-Schinzelovy posloupnosti

Zóna přímky  $p$  v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí  $p$ . Dokažte, že zóna jedné přímky v arrangementu  $n$  přímek v rovině má složitost  $O(n)$ . [bonus 3]

3. Nechť  $g_1, g_2, \dots, g_m$  jsou grafy  $m$  spojitých po částech lineárních funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ , které se dohromady skládají z  $n$  úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka  $g_1, g_2, \dots, g_m$  má složitost  $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$ . Konkrétně pro  $m = O(1)$  je složitost dolní obálky lineární. [2]

4. Nechť  $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$  je matice  $n \times n$  složená z nul a jedniček neobsahující podmatici tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 1 & * \\ * & 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$

To je, že neexistují indexy  $i_1 < i_2$  a  $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$  takové, že  $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_3} = a_{i_2 j_4} = 1$ .

(a) Dokažte, že počet jedniček v matici  $A$  je nejvýše  $\lambda_s(n) + O(n)$ , kde  $s$  je vhodná konstanta. [1]

(b) Dokažte, že počet jedniček v matici  $A$  je nejvýše  $\lambda_3(n) + O(n)$ . [2]