

## Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

### 3. série – Koncentrace míry a geometrické grafy

nápověda **29.4. (úterý)**, odevzdat do **12.5.**

V následujících dvou příkladech se může hodit pojem sférické míry  $\mu$ , který zazněl na přednášce. Pro připomenutí,  $\mu(A) = \frac{\lambda(\tilde{A})}{\lambda(\mathbb{B}^n)}$ , kde  $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$  a  $\tilde{A} = \{ta : a \in A, t \in [0, 1]\}$ .

1. Množinu  $N \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$  nazveme  $\varepsilon$ -*hustou*, pokud každý bod  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  je vzdálen nejvýše  $\varepsilon$  od nějakého bodu  $y \in N$ .

(a) Ukažte, že každá 1-hustá množina v  $\mathbb{S}^{n-1}$  obsahuje alespoň  $\frac{1}{2}e^{n/8}$  bodů. [1]

(b) Ukažte, že pro každé  $\delta \in (0, 1]$  existuje  $\delta$ -hustá množina v  $\mathbb{S}^{n-1}$  velikosti nejvýše  $(4/\delta)^n$ . [3]

2. Buď  $P$  omezený konvexní mnohostěn v  $\mathbb{R}^n$ , který vznikl průnikem  $N$  (uzavřených) poloprostorů a který obsahuje jednotkovou kouli  $\mathbb{B}^n$ . Ukažte, že pro vhodnou konstantu  $C$  platí následující vztah:

$$\frac{\lambda(\mathbb{B}^n)}{\lambda(P)} \leq \left( \frac{C \ln N}{n} \right)^{n/2}.$$

Hint: Uvažte sféru  $S'$  o poloměru  $r > 1$  takovou, že poloprostory opačné k těm, co definují  $P$ , pokryjí dohromady půlku  $S'$ . [3]

3. Určete množinu všech

a) stromů, [1]

b) lesů, [1]

c) grafů, [2]

které jdou nakreslit jako geometrický graf bez dvou disjunktních hran.

4. *Smyčka* je uzavřená křivka v rovině, která sama sebe kříží konečně mnohokrát. *Arrangement smyček* je systém konečně mnoha smyček, kde každé dvě se kříží jen v konečně mnoha bodech. Body dotyku jsou zakázané, vícenásobná křížení jsou povolena. *Vrcholy, hrany a stěny* arrangementu smyček  $\mathcal{A}$  jsou vrcholy, hrany a stěny (nakresleného) rovinného multigrafu se smyčkami, jehož vrcholy jsou křížení  $\mathcal{A}$  a hrany vedou podél smyček mezi sousedními kříženími. Dokažte, že stěny každého arrangementu smyček lze obarvit červeně a modře tak, že každé dvě stěny sousedící přes hranu mají různou barvu. [1]