Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

2. série - Konvexní geometrie

nápověda 7. 4. 2014, odevzdat do 14. 4. 2014

1. (a) Buď $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/2} \mathrm{d}x$, kde $\|x\| = (x_1^2 + \cdots x_n^2)^{1/2}$ je eukleidovská norma. Vyjádřete I_n pomocí I_1. **[1]**

   (b) Vyjádřete I_n pomocí $V_n = \mathrm{Vol}(B^n)$ a vhodného jednorozměrného integrálu. Uvažujte přírůstek I_n na mezisféří[1] o vnitřním poloměru r a vnějším $r + \mathrm{d}r$. B^n označuje n-rozměrnou jednotkovou kouli. **[2]**

   (c) Spočtěte I_n pomocí (b) pro $n = 2$ a (a). **[1]**

   (d) Pomocí rekurence spočtěte integrál z (b) a určete V_n. **[3]**

2. Nechť A obsahuje jediný bod a nechť B je n-dimenzionální jednotková krychle. Čemu potom odpovídá funkce $v(t) = \mathrm{Vol}((1-t)A + tB)$? Dokažte, že $v(t)^\beta$není konkávní na intervalu $[0, 1]$ pro žádné $\beta > 1/n$. **[1]**

3. (a) Mějme kompaktní konvexní těleso $K \subseteq \mathbb{R}^n$ symetrické kolem počátku. Ukažte, že existuje elipsoid[2] E, rovněž symetrický kolem počátku, pro který platí: **[4]**

$$E \subseteq K \subseteq \sqrt{n}E.$$

   Nápověda: Uvažte elipsoid $E \subseteq K$, který je symetrický podle počátku a má maximální objem (nemusíte dokazovat jeho existenci), a bod $p \in K$ dostatečně daleko. Ukažte, že konvexní obal $E \cup \{-p, p\}$ (a tedy i K) obsahují elipsoid E', jenž má objem ostře větší než je objem E. To už dává spor.

   Poznámka: Tento příklad je opravdu těžší.

   (b) Ukažte, že faktor $\sqrt{n}$ v předchozí části nelze obecně zlepšit. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`

[1] Množina $\{x \in \mathbb{R}^n : r \leq \|x - a\| \leq r + \mathrm{d}r\}$, kde a je střed koule.

[2] Elipsoid je afinní obraz jednotkové koule; tj. $E = f(B^n)$, kde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je afinní zobrazení tvaru $f(x) = Ax + c$, kde A je regulární $n \times n$ matice a $c \in \mathbb{R}^n$ je vektor posunutí.