Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série - Lebesgueova míra

nápověda 17. 3. 2014, odevzdat do 24. 3. 2014

1. Dokažte, že λ^* je spočetně subaditivní. Tedy ukažte, že pro spočetný systém $A_1, A_2, \ldots$ podmnožin $\mathbb{R}$ platí **[2]**

$$\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(A_i).$$

2. (a) Dokažte, že doplněk měřitelné množiny je měřitelná množina a že spočetné sjednocení měřitelných množin je měřitelná množina. **[2]**

   (b) Z předešlé části plyne, že měřitelné množiny tvoří σ-algebru, což je množinový systém uzavřený na doplňky a spočetná sjednocení. Nechť X je konečná množina. Popište všechny σ-algebry na X. **[2]**

3. (a) Mějme množiny $K_0 = [0,1]$ a $K_i = \frac{1}{3}K_{i-1} \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}K_{i-1})$ pro $i \geq 1$. Spočítejte Lebesgueovu míru množiny $C = \cap_{i=0}^{\infty} K_i$ a ukažte, že C je nespočetná. **[2]**

   (b) Uvažme následující modifikaci $\tilde{C}$ množiny C z předešlé části. Mějme $\tilde{C} = \cap_{i=0}^{\infty} \tilde{K}_i$, kde $\tilde{K}_0 = [0,1]$ a $\tilde{K}_i$ vznikne z $\tilde{K}_{i-1}$ odstraněním prostředního úseku délky 2^{-2i} z každého z 2^{i-1} intervalů v $\tilde{K}_{i-1}$. Tedy smazané intervaly se neustále zmenšují. Ukažte, že $\tilde{C}$ má kladnou míru. (Budeme-li toto vědět, pak se dá ukázat, že charakteristická funkce množiny $\tilde{C}$ není Riemannovsky integrovatelná.) **[2]**

   (c) Najděte posloupnost spojitých, a tedy Riemannovsky integrovatelných, funkcí $f_1, f_2, \ldots$, která konverguje k charakteristické funkci $\chi_{\tilde{C}}$ množiny $\tilde{C}$. **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`