Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

5. série - Polytopy

nápověda 10.12.2013, odevzdat do 17.12.2013

1. Spočítejte přesný počet stěn všech dimenzí pro cyklický mnohostěn dimenze 4 s n vrcholy. **[2]**

2. Zobecnění Erdősovy-Szekeresovy věty na d-rozměrné cyklické mnohostěny.

   (a) Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou body v $\mathbb{R}^d$. Vektory $y_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ získáme přidáním nové složky s hodnotou 1 za poslední složku vektoru x_i. Body x_i byly zvoleny tak, že pro libovolnou volbu indexů $i_1 < i_2 < \cdots < i_{d+1}$ je determinant matice se sloupci $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{d+1}}$ nenulový a vždy se stejným znaménkem. Dokažte, že mnohostěn, který je konvexním obalem bodů $x_1, \ldots, x_n$, je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[4]**

   (b) Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel n, d existuje N takové, že z každých N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$ lze vybrat n bodů, jejichž konvexní obal je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[3]**

3. *Graf mnohostěnu* P je graf $\Gamma(P)$, jehož množina vrcholů je množina vrcholů P a množina hran je množina dvojic vrcholů spojených v P hranou. Uvažujme kompaktní konvexní mnohostěn $P \subset \mathbb{R}^d$, jeho dva vrcholy x a y a nadrovinu L. Dokažte, že leží-li x a y na stejné straně od L, pak x a y jsou v $\Gamma(P)$ spojeny cestou procházející pouze vrcholy, které se nacházejí na stejné straně od L jako x a y. **[4]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`