Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. série - Minkowského věta a věta o sendviči

nápověda 12.11.2013, odevzdat do 19.11.2013

1. Dokažte: Pokud $C \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní, symetrická okolo počátku, omezená, taková, že $\mathrm{vol}\,(C) > k2^d$, potom C obsahuje alespoň $2k$ mřížových bodů. **[3]**

2. Ukažte, že pro každé kladné iracionální číslo α existuje nekonečně mnoho dvojic čísel $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že **[1]**
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

3. Dokažte, že pro $\alpha = \sqrt{2}$ existuje jen konečně mnoho dvojic $m, n \in \mathbb{N}$ splňujících **[4]**
$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{4n^2}.$$
Můžete bez důkazu použít fakt, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

4. Nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ jsou reálná čísla. Dokažte, že pro dané $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $0 < n \leq N$, taková, že **[3]**
$$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}}, \quad i = 1, 2.$$

5. Věta o sendviči říká, že pro disjunktní konečné množiny $A_1, \ldots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ existuje nadrovina h taková, že každý jí určený otevřený poloprostor obsahuje nanejvýš $\left\lfloor \frac{|A_i|}{2} \right\rfloor$ bodů z každého A_i.

   Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_d$ jsou disjunktní množiny v $\mathbb{R}^d$ takové, že každá A_i obsahuje n bodů a body z $\cup_{i=1}^d A_i$ jsou v obecné poloze. Neboli žádná nadrovina neprotíná víc než d bodů z tohoto sjednocení. Ukažte, že potom lze body z $\cup_{i=1}^d A_i$ rozdělit do n duhových d-tic (tj. množin $\{x_1, \ldots, x_d\}$, kde $x_i \in A_i$), jejichž konvexní obaly jsou disjunktní. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`