# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 2. série - Věty Hellyho typu

nápověda 29.10.2013, odevzdat do 5.11.2013

1. Nechť $C_1, \ldots, C_n$ je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a nechť $K$ je kompaktní podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii $K$, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje posunutou kopii $K$. **[2]**

2. Mějme dánu konvexní množinu $A \subseteq \mathbb{R}^d$ a konečný soubor $H$ uzavřených poloprostorů z $\mathbb{R}^d$, které pokrývají $A$ (tedy $A$ je obsažená v jejich sjednocení). Ukažte, že potom lze množinu $A$ pokrýt nanejvýš $d+1$ poloprostory z $H$. **[2]**

3. (a) Mějme soubor konvexních množin v rovině $C_1, \ldots, C_n$, $n \geq 4$. Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku. **[4]**

   (b) Najděte 6 navzájem různých konvexních množin v rovině $C_1, \ldots, C_6$ takových, že průnik každé trojice z $C_1, \ldots, C_6$ obsahuje polopřímku, ale průnik všech $C_1, \ldots, C_6$ polopřímku neobsahuje. **[2]**

4. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má $(p,q)$-vlastnost, pokud $n \geq p$ a z každé $p$-tice z $\mathcal{C}$ lze vybrat $q$ množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost $s(\mathcal{C})$ souboru množin $\mathcal{C}$ je velikost nejmenší množiny bodů $X$ takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň 1 bod z $X$.

   (a) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s $(2,2)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) = 1$. **[1]**

   (b) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků se $(4,3)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. **[3]**

   (c) Najděte soubor $\mathcal{C}$ několika osových obdélníků s $(3,2)$-vlastností, pro který $s(\mathcal{C}) = 3$. **[2]**

---

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`