Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

1. série - Konvexní množiny

nápověda 22.10.2013, odevzdat do 29.10.2013

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. Pro $M \subseteq \mathbb{R}^d$ dokažte: Pokud $\forall x, y \in M,\ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda x + (1 - \lambda)y \in M$, pak M je afinní podprostor. [2]

2. a) Najděte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, která je uzavřená, ale jejíž konvexní obal uzavřený není. [1]

   b) Dokažte, že konvexní obal každé omezené uzavřené množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřený. [2]

3. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu nebo část postupu jejího důkazu). [3]

4. Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_r$ jsou kompaktní konvexní množiny v $\mathbb{R}^d$. Dokažte, že $\bigcap_{i=1}^r C_i = \emptyset$ právě tehdy, když existují uzavřené poloprostory H_1, H_2, …, H_r takové, že $C_i \subseteq H_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, r\}$ a $\bigcap_{i=1}^r H_i = \emptyset$. [3]

5. a) Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_{d+1}$ jsou konečné množiny bodů z $\mathbb{R}^d$ takové, že počátek leží v $\mathrm{conv}(X_i)$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, d + 1\}$. Dokažte, že potom existují body $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, d + 1\}$, takové, že počátek leží v $\mathrm{conv}(\{x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}\})$. [3]

   b) Ukažte, že méně množin už nestačí. [1]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`