Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

4. série - Geometrické grafy, Davenportovy-Schinzelovy posloupnosti

nápověda 17. 5. 2013 mailem, odevzdat do 23. 5. 2013

1. Určete množinu všech

   a) stromů, **[1]**

   b) lesů, **[1]**

   c) grafů, **[2]**

   které jdou nakreslit jako geometrický graf bez dvou disjunktních hran.

2. *Smyčka* je uzavřená křivka v rovině, která sama sebe kříží konečně mnohokrát. *Arrangement smyček* je systém konečně mnoha smyček, kde každé dvě se kříží jen v konečně mnoha bodech. Body dotyku jsou zakázané, vícenásobná křížení jsou povolena. *Vrcholy, hrany* a *stěny* arrangementu smyček $\mathcal{A}$ jsou vrcholy, hrany a stěny (nakresleného) rovinného grafu, jehož vrcholy jsou křížení $\mathcal{A}$ a hrany vedou podél smyček mezi sousedními kříženími. Dokažte, že stěny každého arrangementu smyček lze obarvit červeně a modře tak, že každé dvě stěny sousedící přes hranu mají různou barvu. **[1]**

Maximální možnou délku Davenportovy-Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, 3, \ldots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů a hran ležících na hranici buňky.

3. **Složitost jedné buňky arrangementu úseček**
   Nechť C je buňka arrangementu n úseček v obecné poloze v rovině (speciálně žádné dvě neleží na stejné přímce), jejichž sjednocením je souvislá množina.

   (a) Úsečky očíslujeme čísly 1 až n. Napíšeme posloupnost čísel úseček podél hranice buňky C, počínaje libovolným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že v takto získané posloupnosti se nevyskytuje podposloupnost *ababab*, a tedy složitost buňky C je $O(\lambda_4(n))$. **[2]**

   (b) Najděte příklad, kde se v posloupnosti z první části příkladu vyskytuje *ababa* (a to bez ohledu na volbu počátečního vrcholu). **[1]**

   (c) Dokažte, že složitost buňky C je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. **[3]**

4. Nechť $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ je matice $n \times n$ složená z nul a jedniček neobsahující podmatici tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 1 & * \\ * & 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$

   To znamená, že neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_3} = a_{i_2 j_4} = 1$.

   (a) Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_s(n) + O(n)$, kde s je vhodná konstanta. **[1]**

   (b) Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`