Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

3. série - Separátory, pravděpodobnostní metoda, hranová expanze, $\exists\mathbb{R}$-úplnost, křivky a topologické grafy v rovině

nápověda 25. 4. 2013, odevzdat do 2. 5. 2013

1. Nechť $\alpha > 0$ a nechť G je graf s n vrcholy takový, že pro každý jeho indukovaný podgraf H s aspoň $2n/3$ vrcholy platí $\mathrm{vspars}(H) \leq \alpha$. Ukažte, že G má separátor velikosti nejvýše αn^2. (Definice separátoru a vspars jsou podle přednášky.) **[1]**

2. Nechť U, V jsou disjunktní množiny a j přirozené číslo splňující $2^{j-1} < |U| \leq 2^j$ a $|V| \leq 2|U|$. Nechť A je náhodná podmnožina $U \cup V$ taková, že každý bod $U \cup V$ se vybere nezávisle s pravděpodobností $1/2^j$. Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ nezávislá na U, V, j, pro kterou platí
$$\mathbf{P}\left[U \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap A = \emptyset\right] > c.$$
[2]

3. Nechť G je r-regulární graf a μ_2 druhé nejmenší vlastní číslo jeho Laplaceovy matice L.

   a) Dokažte, že pro každý reálný vektor $x = (x_v)_{v \in V(G)}$ splňující $\sum_{v \in V(G)} x_v = 0$ platí $x^T L x \geq \mu_2 ||x||_2^2$. **[2]**

   b) Dokažte, že
   $$\min\left\{ \frac{\sum_{uv \in E(G)} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{uv \in \binom{V}{2}} (f(u) - f(v))^2}; f : V(G) \to \mathbb{R}, f \text{ není konstantní} \right\} = \frac{\mu_2}{n}.$$
   [2]

4. *Slabá úsečková realizovatelnost* je rozhodovací problém, kde na vstupu je abstraktní topologický graf (G, R) a úkolem je rozhodnout, zda existuje jeho úsečkové nakreslení, kde pouze dvojice hran z R se mohou křížit. Ukažte, že slabá úsečková realizovatelnost je $\exists\mathbb{R}$-těžká. Můžete použít fakt, že *narovnatelnost jednoduchého arrangementu pseudopřímek* je $\exists\mathbb{R}$-úplný problém: na vstupu je arrangement pseudopřímek, kde se žádné tři neprotínají ve stejném bodě. Otázkou je rozhodnout, zda lze tento arrangement "narovnat"(pomocí homeomorfismu) na arrangement přímek, aniž by se změnilo pořadí křížení. **[3]**

5. Nechť α a β jsou dvě jednoduché křivky v rovině, otevřené nebo uzavřené (tj. obrazy intervalu nebo kružnice), které se navzájem kříží v 2013 bodech a nemají žádný bod dotyku. Dvě křížení x, y nazveme *blízká*, pokud jsou sousední na obou křivkách α i β. Rozhodněte, zda nutně existují dvě blízká křížení,

   a) jsou-li obě křivky otevřené, **[1]**

   b) je-li α otevřená a β uzavřená. **[1]**

6. a) Pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ a pro obecné n najděte graf G_n s n vrcholy a $m(G_n) = \Theta(n^{1+\varepsilon})$ hranami a podgraf $G'_n \subset G_n$ s
   $$m(G'_n) = (1 - o(1))\, m(G_n)$$
   hranami tak, aby pro jejich průsečíková čísla platilo
   $$\mathrm{CR}(G'_n) = o(\mathrm{CR}(G_n)).$$
   (Tedy smazáním nějaké "nepatrné"množiny hran klesne průsečíkové číslo na "nepatrný"zlomek.) **[2]**

b) Pro každé $\delta > 0$ a pro obecné n najděte graf G_n s n vrcholy a $m \geq \Omega(n^{1.2013})$ hranami s následující vlastností. Je-li G'_n náhodný podgraf G_n vzniklý vybráním každé hrany nezávisle s pravděpodobností $p = 1 - \delta$, pak

$$\mathbf{P}\left[\mathrm{CR}(G'_n) \leq \frac{\mathrm{CR}(G_n)}{n^{0.01}}\right] > 1 - o(1).$$

[bonus 3]

7*** Nechť G je jednoduché nakreslení úplného grafu s n vrcholy. *Virtuální hrana* je buď hrana G nebo libovolná sebe neprotínající křivka, která protíná každou hranu G nejvýše jednou. *Virtuální trojúhelník* je jednoduchá uzavřená křivka složená ze tří virtuálních hran (které se vzájemně nekříží). Jednoduchá uzavřená křivka je *separující*, pokud rozděluje rovinu na dvě části, z nichž každá obsahuje nejvýše $2n/3$ vrcholů G. Dokažte, že G má separující virtuální trojúhelník (nebo najděte protipříklad). **[bonus 5]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`