

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

2. série - Pseudometriky & průsečíkové a topologické grafy v rovině

náповěda 4. 4. 2013, odevzdat do 11. 4. 2013

1. a) Ukažte, že každá přímková pseudometrika ρ na n -bodové množině V je nezápornou lineární kombinací nejvýše $n - 1$ řezových pseudometrik τ_i : $\rho = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \tau_i$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \geq 0$. *Přímková pseudometrika* ρ je pseudometrika indukovaná zobrazením $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ (tedy $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$); *řezová pseudometrika* je pseudometrika indukovaná zobrazením $f : V \rightarrow \{0, 1\}$. [2]

- b) Necht' $G = (V, E)$ je graf. Dokažte, že reálná funkce

$$\frac{\sum_{uv \in E} \rho(u, v)}{\sum_{uv \in \binom{V}{2}} \rho(u, v)}$$

na prostoru nenulových přímkových pseudometrik na V nabývá minimum, a to pro nějakou řezovou pseudometriku. (Pseudometrika je *nenulová*, pokud alespoň jedna vzdálenost je nenulová.) [2]

2. V následujících úlohách uvažujeme *jednoduchá* nakreslení grafu, kde každé dvě hrany se kříží nejvýše jednou, a přitom hrany se společným vrcholem se již nekříží. Předpokládáme standardní podmínky pro *nakreslení* grafu: hrany jsou nakresleny pomocí sebe neprotínajících křivek, konečný počet křížení, vnitřky hran neobsahují vrcholy, hrany se nedotýkají a jedním křížením prochází nejvýše dvě hrany. Není-li řečeno jinak, nakreslení se uvažují v rovině.

- a) Najděte jednoduché nakreslení nějakého grafu, které nejde doplnit na jednoduché nakreslení úplného grafu na stejné množině vrcholů. [1]

- a^{***}) Lze každé jednoduché nakreslení grafu doplnit na jednoduché nakreslení souvislého grafu na stejné množině vrcholů? [bonus 5]

- b) Najděte jednoduché nakreslení alespoň jednoho úplného grafu, kde každá hrana kříží alespoň jednu jinou. [1]

- c) Alespoň pro jedno n najděte jednoduché nakreslení úplného grafu s n vrcholy a $\binom{n}{4}$ průsečíky, ve kterém neleží všechny vrcholy ve stejné stěně (ani vnější). *Stěnou* rozumíme každou souvislou část roviny, která zbyde po rozstříhání podél všech hran. [1]

- bc^{***}) Alespoň pro jedno n najděte jednoduché nakreslení úplného grafu s n vrcholy a $\binom{n}{4}$ průsečíky, kde každá hrana kříží alespoň jednu jinou. [bonus 5]

- d) Pro obecné n najděte jednoduché nakreslení úplného grafu s n vrcholy na toru ("povrchu pneumatiky"), ve kterém má každá hrana $\Omega(n^2)$ křížení. [1]

3. Niťový graf nazveme *1-niťový*, jde-li realizovat pomocí křivek, z nichž každé dvě se protínají nejvýše jednou a ve společném bodě se křivky vždy kříží (takovým křivkám se také říká *pseudoúsečky*). Najděte 1-niťový graf G takový, že jeho rozšíření o simplicialní vrchol (vrchol připojený na všechny vrcholy G) není 1-niťový graf. Jinými slovy, k žádné realizaci G nelze přikreslit pseudoúsečka protínající všechny pseudoúsečky reprezentující vrcholy G . [3]