

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série - Průsečkové a topologické grafy v rovině

náповěda 14. 3. 2013, odevzdat do 21. 3. 2013

1. Mějme obloukově souvislou otevřenou podmnožinu roviny M . Dokažte, že každé dva různé body z M lze spojit lomenou čarou, která celá leží uvnitř M a navíc má jen konečně mnoho zlomů. [2]

2. Nechtě

- $f_s(G)$ je minimální počet průsečíků nití v niťové reprezentaci G , $f_s(n) = \max\{f_s(G); G \text{ je niťový graf na } n \text{ vrcholech}\}$,
- $f_w(G, R)$ je minimální počet průsečíků ve slabé reprezentaci (G, R) (není-li (G, R) slabě realizovatelný, je $f_w(G, R) = \infty$), a $f_w(m) = \max\{f_w(G, R); G \text{ má } m \text{ hran a } f_w(G, R) < \infty\}$.

Dokažte, že

$$f_s(n) \leq 4f_w(n^2) + n^2.$$

Náповěda: pro daný niťový graf $G = (V, E)$ definujte abstraktní topologický graf následovně: $A = ((V \cup E, I), R)$, kde $I = \{\{v, e\}; v \in V, e \in E, v \in e\}$ a $R = \{\{\{v, e\}, \{w, f\}\}; \{v, w\} \in E\}$. [2]

3. Dokažte, že průnikových grafů n křivek v rovině je alespoň $2^{\Omega(n^2)}$. [1]

4. Ukažte, že navzájem neizomorfních průnikových grafů n úseček v rovině je alespoň $2^{\Omega(n \log n)}$. [2]

5. Uvažme nakreslení úplného grafu G v rovině (hrany jsou nakresleny pomocí sebe neprotínajících křivek, každé dvě hrany se kříží nejvýše jednou, přitom hrany se společným vrcholem se již nekříží). Pro každou hranu $e \in E(G)$ definujeme graf $H_e = (V(G), F_e)$, kde F_e je množina hran G , které kříží e . Dokažte, že H_e je perfektní graf. Můžete bez důkazu použít silnou větu o perfektních grafech. [3]

6. Dokažte, že $K_{2,n}$ lze nakreslit exponenciálně mnoha různými způsoby tak, že sousední hrany se nekříží a každé dvě hrany se kříží nejvýše jednou. Navíc požadujeme, aby všechna tato nakreslení měla stejné pořadí hran okolo odpovídajících si vrcholů. Nakreslení považujeme za různá, pokud množiny dvojic protínajících se hran jsou různé.

V této úloze (na rozdíl od ostatních) vrcholy grafu uvažujeme očíslované různými čísly. [2]