Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

7. série (bonusová)

nápověda pro zájemce 29.1.2013 emailem, odevzdat do 18.2.2013

1. Bod x v konvexní množině $C \subseteq \mathbb{R}^2$ nazveme *extremální*, pokud $x \notin \mathrm{conv}(C \setminus \{x\})$, a *exponovaný*, pokud existuje přímka p taková, že $p \cap C = \{x\}$ a C leží celá v jedné z polorovin určených přímkou p. Najděte příklad konvexní množiny $C \subseteq \mathbb{R}^2$ s bodem $x \in C$, který je extremální, ale ne exponovaný. **[1]**

2. Najděte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, která je sjednocením dvou konvexních množin a jejíž doplněk se skládá z 5 navzájem oddělených oblastí (komponent souvislosti). **[2]**

3. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p,q)-vlastnost, pokud $n \geq p$ a z každé p-tice z $\mathcal{C}$ lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost $s(\mathcal{C})$ souboru množin $\mathcal{C}$ je velikost nejmenší množiny bodů X takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň 1 bod z X.

   (a) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s $(2,2)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) = 1$. **[1]**

   (b) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků se $(4,3)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. **[3]**

   (c) Najděte soubor $\mathcal{C}$ několika osových obdélníků s $(3,2)$-vlastností, pro který $s(\mathcal{C}) = 3$. **[2]**

4. Množina bodů P *prošpendluje trojúhelníky* množiny bodů M, pokud každý trojúhelník určený trojicí bodů z M obsahuje ve svém vnitřku alespoň jeden bod z P.

   (a) Dokažte, že pro každé $n \geq 3$ a pro každou n-bodovou $M \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze lze najít P s $2n-5$ body prošpendlující trojúhelníky M. **[3]**

   (b) Pro každé $n \geq 3$ najděte n-bodovou $M \subset \mathbb{R}^2$ v obecné poloze takovou, že žádná P s $2n-6$ body neprošpendluje její trojúhelníky. **[2]**

5. Nechť $\mathcal{C}$ je množina všech buněk (stěn maximální dimenze) arrangementu množiny n přímek v rovině. Dokažte, že $\sum_{C \in \mathcal{C}} f_0(C)^2 = O(n^2)$ ($f_0(C)$ je počet vrcholů buňky C). **[3]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`