Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série - Voroného diagramy a arrangementy

nápověda 18.12.2012, odevzdat do 8.1.2013

1. Pořádně dokažte, že region *reg*(p) bodu p ve Voroného diagramu konečné množiny bodů $P \subset \mathbb{R}^d$ je neomezený právě tehdy, když p leží na hranici $\operatorname{conv}(P)$. **[2]**

2. (a) Ukažte, že pro $n \geq 2$ má Voroného diagram $2n$-bodové množiny $A_{2n} := \{(i, 0, 0) : i = 1, 2 \ldots n\} \cup \{(0, n, j) : j = 1, 2 \ldots n\}$ v $\mathbb{R}^3$ alespoň cn^2 vrcholů, kde c je nějaká kladná konstanta. **[3]**

   (b) Ukažte, že pro $n \geq k$ může mít Voroného diagram $2n$-bodové množiny v $\mathbb{R}^{2k-1}$ až $c_k n^k$ vrcholů, kde c_k je nějaká kladná konstanta. **[2]**

3. Nechť P je konečná množina bodů v rovině, z nichž žádné 3 neleží na společné přímce a žádné 4 na společné kružnici. Definujme na P graf DT (zvaný *Delaunayova triangulace*): dva body a, b jsou spojeny hranou, právě když existuje kruh mající a i b na hranici a žádný bod z P uvnitř.

   (a) Dokažte, že DT je pseudotriangulace — rovinné nakreslení souvislého grafu, jehož každá stěna kromě vnější je trojúhelník. **[3]**

   (b) Dokažte, že DT je duální graf ke grafu Voroného diagramu množiny P. **[3]**

   (c) Nechť T je minimální kostra v úplném grafu na P, kde váhy hran jsou vzdálenosti bodů. Dokažte, že $T \subseteq DT$. **[2]**

4. Spočtěte počet všech stěn dimenzí 1 a 2 arrangementu n rovin v obecné poloze v $\mathbb{R}^3$. **[2]**

5. (a) Kolik je d-dimenzionálních buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v $\mathbb{R}$, které odpovídají rovnicím $x_i = x_j$, kde $1 \leq i < j \leq d$? **[3]**

   (b) Na kolik d-dimenzionálních buněk rozdělí prostor $\mathbb{R}^d$ nadroviny určené rovnicemi $x_i + x_j = 0$ a $x_i = x_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq d$? **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`