Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

5. série - Polytopy

nápověda 4.12.2012, odevzdat do 11.12.2012

1. Spočítejte přesný počet stěn všech dimenzí pro cyklický mnohostěn dimenze 4 s n vrcholy. **[2]**

2. Zobecnění Erdősovy-Szekeresovy věty na d-rozměrné cyklické mnohostěny.

   (a) Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou body v $\mathbb{R}^d$. Vektory $y_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ získáme přidáním nové složky s hodnotou 1 za poslední složku vektoru x_i. Body x_i byly zvoleny tak, že pro libovolnou volbu indexů $i_1 < i_2 < \cdots < i_{d+1}$ je determinant matice se sloupci $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{d+1}}$ nenulový a vždy se stejným znaménkem. Dokažte, že mnohostěn, který je konvexním obalem bodů $x_1, \ldots, x_n$, je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[4]**

   (b) Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel n, d existuje N takové, že z každých N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$ lze vybrat n bodů, jejichž konvexní obal je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. **[3]**

3. Mějme konvexní mnohostěn $P \subset \mathbb{R}^3$, jehož každý vrchol má sudý stupeň. Dokažte, že každý řez mnohostěnem P, který neprochází vrcholem P, je mnohoúhelník se sudým počtem hran. **[2]**

4. Mějme kompaktní konvexní d-rozměrné mnohostěny P a Q.

   (a) Dokažte, že $P \cup Q$ je konvexní právě tehdy, když pro každý u vrchol P a každý v vrchol Q jejich spojnice splňuje $[u, v] \subset P \cup Q$. **[3]**

   (b) Dokažte, že $P \cup Q$ je nekonvexní právě tehdy, když existuje u vrchol P a v vrchol Q, jejichž spojnice splňuje $[u, v] \cap (P \cup Q) = \{u, v\}$. **[1]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`