

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série - Dualita a Mnohostěny

nápověda 20.11.2012, odevzdat do 27.11.2012

1. Nechť $C = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_1| + \dots + |x_d| \leq 1\}$ (zobecněný osmistěn). Ukažte, že C^* je krychle $\{x \in \mathbb{R}^d : \max |x_i| \leq 1\}$. [2]
2. Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\text{conv}(X \cup \{0\})$. [2]
3. Uvažujme kompaktní konvexní d -rozměrný mnohostěn P . S použitím definice stěny z přednášky pořádně dokažte, že průnik dvou stěn P je stěna P . [2]
4. Uvažujme pravidelný čtyřstěn o hraně délky 1 a sféru $S \subset \mathbb{R}^3$ jemu opsanou. Vezměme množinu $F \subset S$ bodů získanou promítnutím jedné fasety tohoto čtyřstěnu ze středu S na S . *Průměr* množiny F je maximální euklidovská vzdálenost mezi dvojicí bodů F . Dokažte, že průměr F je ostře větší než 1. [3]
5. *Graf polytopu* P je graf $\Gamma(P)$, jehož množina vrcholů je množina vrcholů P a množina hran je množina dvojic vrcholů spojených v P hranou. Uvažujme kompaktní polytop $P \subset \mathbb{R}^d$, jeho dva vrcholy x a y a nadrovinu L . Dokažte, že leží-li x a y na stejné straně od L , pak x a y jsou v $\Gamma(P)$ spojeny cestou procházející pouze vrcholy, které se nacházejí na stejné straně od L jako x a y . [4]
6. Vezměme d -dimenzionální jednotkovou hyperkrychli $C_d \subset \mathbb{R}^d$ s $d \geq 3$. Dokažte, že existuje nadrovina, která má neprázdný průnik se všemi fasetami C_d , ale neobsahuje žádný vrchol C_d . [1]