Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. série - Minkowského věta a Věta o sendviči

nápověda 6.11.2012, odevzdat do 13.11.2012

1. Ukažte, že pro každé kladné iracionální číslo α existuje nekonečně mnoho dvojic čísel $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že **[1]**

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

2. Dokažte, že pro $\alpha = \sqrt{2}$ existuje jen konečně mnoho dvojic $m, n \in \mathbb{N}$ splňujících **[4]**

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{4n^2}.$$

   Můžete bez důkazu použít fakt, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo.

3. Nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ jsou reálná čísla. Dokažte, že pro dané $N \in \mathbb{N}$ existují $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $n \leq N$, taková, že **[3]**

$$\left|\alpha_i - \frac{m_i}{n}\right| < \frac{1}{n\sqrt{N}},\ i = 1, 2.$$

4. Dokažte: Pokud $C \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní, symetrická okolo počátku, omezená, taková, že $\operatorname{vol}(C) > k2^d$, potom C obsahuje alespoň $2k$ mřížových bodů. **[3]**

5. Věta o sendviči říká, že pro konečné množiny $A_1, \ldots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ existuje nadrovina h, která půlí každou A_i, $i = 1, \ldots, d$. Definice půlení přitom zní: nadrovina h půlí konečnou $A \subset \mathbb{R}^d$, pokud každý jí určený otevřený poloprostor obsahuje nanejvýš $\left\lfloor \frac{|A|}{2} \right\rfloor$ bodů z A.

   Ukažte, že nahradíme-li původní definici přirozenějším zněním: nadrovina h půlí $A \subset R^d$, pokud $|h^+ \cap A| + \frac{1}{2}|h \cap A| = \frac{1}{2}|A|$, kde h^+ je jeden z otevřených poloprostorů určených h, tak potom existují dvě konečné množiny bodů v rovině, které nelze rozpůlit. **[2]**
