

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

2. série - Věty Hellyho typu

nápověda 23.10.2012, odevzdat do 30.10.2012

1. Necht' C_1, \dots, C_n je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a necht' K je kompaktní podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z C_1, \dots, C_n obsahuje posunutou kopii K , potom také průnik všech C_1, \dots, C_n obsahuje posunutou kopii K . [2]
2. *Sféra* je hranice koule v \mathbb{R}^3 . *Otevřená polosféra* se středem v x je množina bodů sféry, které jsou při pohledu ze středu koule v úhlové vzdálenosti ostře menší než $\pi/2$ od x . *Sférická úsečka* mezi body sféry x a y je jejich nejkratší spojnice, která je celá obsažená ve sféře. Všimněte si, že sférická úsečka je část kružnice, která je obsažená v rovině procházející středem koule a body x a y . Množina X bodů sféry je *sféricky konvexní*, pokud pro každé dva body $x, y \in X$ je sférická úsečka spojující x a y obsažena v X .
 - (a) Mějme sféricky konvexní množiny X_1, \dots, X_n , které jsou všechny obsažené v téže otevřené polosféře. Dokažte, že pokud každá trojice z X_1, \dots, X_n má neprázdný společný průnik, tak potom platí $\bigcap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset$. [3]
 - (b) Dokažte, že podmínka, že všechny množiny jsou v téže otevřené polosféře, nejde nahradit podmínkou, že každá leží v nějaké otevřené polosféře. [2]
3. Mějme konečné množiny bodů A_1, \dots, A_k v \mathbb{R}^d , přičemž $k \leq d$. Dokažte, že existuje afinní podprostor \mathbb{R}^d dimenze $k - 1$ takový, že každá nadrovina, která jej obsahuje, dělí každou A_i na dvě části o velikosti alespoň $|A_i|/(d + 1)$. [2]
4. (a) Mějme soubor konvexních množin v rovině C_1, \dots, C_n , $n \geq 4$. Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z C_1, \dots, C_n obsahuje polopřímku, potom také průnik všech C_1, \dots, C_n obsahuje polopřímku. [4]
 - (b) Najděte šest navzájem různých konvexních množin C_1, \dots, C_6 v rovině takových, že průnik každé trojice z C_1, \dots, C_6 obsahuje polopřímku, ale průnik všech C_1, \dots, C_6 polopřímku neobsahuje. [2]