Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

1. série - Konvexní množiny

nápověda 16.10.2012, odevzdat do 23.10.2012

Z důvodu ochrany osobních údajů nám u prvních odevzdaných řešení napište kromě jména i přezdívku, pod kterou chcete mít své body zveřejněny na webu. U dalších řešení už stačí psát buď jméno, nebo přezdívku.

1. a) Najděte příklad množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, která je uzavřená, ale jejíž konvexní obal uzavřený není. [1]

   b) Dokažte, že konvexní obal každé omezené uzavřené množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřený. [2]

2. Dokažte Carathéodoryho větu (můžete použít Radonovu větu nebo část postupu jejího důkazu). [3]

3. Uvažujme množinu bodů $M = \{x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_{d+1}, y_{d+1}\}$ v $\mathbb{R}^d$. Dokažte, že M se dá rozdělit na dvě podmnožiny A a B, z nichž každá obsahuje právě jeden bod z $\{x_i, y_i\}$ pro každé $i = 1, 2, ..., d+1$ tak, aby se konvexní obaly A a B protínaly. (Můžete využít toho, že $(d+1)$-ice vektorů $x_i - y_i$ je lineárně závislá a poté postupovat podobně jako v důkaze Radonovy věty.) [2]

4. Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_r$ jsou kompaktní konvexní množiny v $\mathbb{R}^d$. Dokažte, že $\bigcap_{i=1}^r C_i = \emptyset$ právě tehdy, když existují uzavřené poloprostory H_1, H_2, $\ldots$, H_r takové, že $C_i \subseteq H_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, r\}$ a $\bigcap_{i=1}^r H_i = \emptyset$. [4]

5. Mějme M konečnou množinu alespoň čtyř bodů v rovině, z nichž některé jsou červené a zbylé jsou modré. Platí, že pro každou čtveřici V bodů z M existuje přímka, která ostře odděluje červené body z V od modrých bodů z V. Dokažte, že potom lze přímkou ostře oddělit všechny červené body z M od všech modrých bodů z M. [3]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`