

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

IV. série

náповěda 14.5.2012, odevzdat do 21.5.2012

Davenport-Schinzelovy posloupnosti

Maximální možnou délku Davenport-Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, 3, \dots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů a hran ležících na hranici buňky.

- Pěstovaný strom je zakořeněný strom s pevně daným rovinným nakreslením (tj. každý vrchol má pevně určené pořadí svých synů). Takovýto strom R obejdeme z kořene okolo vnější stěny. Vrcholy očíslováme $1, \dots, n$ podle okamžiku první návštěvy. Během průchodu pěstovaným stromem R na n vrcholech si píšeme čísla navštívených vrcholů a získáme tak posloupnost p_R délky $2n - 1$.
 - Dokažte, že p_R je DS-posloupnost řádu 2. [1]
 - Dokažte, že každá DS-posloupnost p řádu 2 nad n symboly a délky $2n - 1$ jednoznačně určuje rovinný zakořeněný strom R , pro který $p_R = p$. [3]
 - Dokažte, že každá DS-posloupnost řádu 2 nad n symboly (ne nutně délky $2n - 1$) se dá reprezentovat jako dolní obálka n -tice parabol. [2]
- Složitost jedné buňky arrangementu úseček
Nechť C je buňka arrangementu n úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.
 - Úsečky očíslováme čísla 1 až n . Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky C , počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost $ababab$, a tedy složitost buňky C je $O(\lambda_4(n))$. [2]
 - Najděte příklad, kde se v posloupnosti z první části příkladu vyskytuje $ababa$ (a to bez ohledu na volbu počátečního vrcholu). [1]
 - Dokažte, že složitost buňky C je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé úsečce přiřadte více různých symbolů. [3]
- Věta o zóně přes Davenport-Schinzelovy posloupnosti
Zóna přímky p v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí p . Dokažte, že zóna jedné přímky v arrangementu n přímek v rovině má složitost $O(n)$. [3]
- Nechť g_1, g_2, \dots, g_m jsou grafy m spojitých po částech lineárních funkcí z \mathbb{R} do \mathbb{R} , které se dohromady skládají z n úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka g_1, g_2, \dots, g_m má složitost $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$. Konkrétně pro $m = O(1)$ je složitost dolní obálky lineární. [2]
- Nechť $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ je matice $n \times n$ složená z nul a jedniček neobsahující podmatici tvaru
$$\begin{pmatrix} 1 & * & 1 & * \\ * & 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$
To je, že neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_3} = a_{i_2 j_4} = 1$.
 - Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_s(n) + O(n)$, kde s je vhodná konstanta. [1]
 - Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$. [2]