Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

III. série - Algebraické metody II

nápověda 30.4.2012, odevzdat do 7.5.2012

V prvních dvou příkladech můžete použít následující větu o incidencích bodů a křivek (pseudoúseček).

Věta. Nechť C je množina m křivek v rovině, z nichž dvě se protínají nejvýše v jednom bodě a žádná křivka nekříží sama sebe. Dále nechť P je množina n bodů v rovině. Pro počet incidencí $I(P,C)$ mezi křivkami z C a body z P platí

$$I(P,C) \leq O\left(m^{2/3}n^{2/3} + m + n\right).$$

1. Nechť A je množina n reálných čísel a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ostře konvexní funkce. Dokažte, že pak $|A+A| \cdot |f(A)+f(A)| \geq \Omega(n^{5/2})$, kde $f(A) = \{f(a); a \in A\}$. (Nápověda: definujte n^2 vhodných křivek, které jsou posunutím grafu funkce $y = f(x)$.) **[3]**

2. Nechť A je množina n kladných reálných čísel. Dokažte, že

$$\left| A + \frac{1}{A} \right| \geq \Omega(n^{5/4}),$$

   kde $\frac{1}{A} = \{\frac{1}{a}; a \in A\}$. **[2]**

3. Mějme polynomy $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$, kde $\deg f = m, \deg g = n$. Dokažte, že $\deg \operatorname{Res}(f,g,x) \leq mn$. **[2]**

4. Rozhodněte, zda existuje ireducibilní polynom $f \in \mathbb{R}[x,y]$ takový, že platí:

   (a) $\deg(f) \leq 3$ a $Z(f)$ má dvě komponenty souvislosti. **[1]**

   (b) $\deg(f) \leq 3$ a $Z(f)$ má dvě komponenty souvislosti různé dimenze. **[1]**

   (c) $\deg(f) \leq 4$ a $Z(f)$ má tři komponenty souvislosti. **[bonus +2]**

   Ireducibilitu můžete ověřovat sporem.

5. Najděte ireducibilní polynom $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$ stupně maximálně 3 takový, že $Z(f) = \ell \cup P$, kde ℓ je přímka, P plocha dimenze 2 a $|\ell \cap P|$ je konečný. **[2]**

6. Pro libovolný polynom $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ závisející jak na x, tak na y, definujme $q_1(x,y) := \frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$. Ukažte, že je-li F zakuklený součet nebo zakuklený součin (tj. existují polynomy $f, g, h \in \mathbb{R}[z]$ takové, že F lze vyjádřit jako $f(g(x)+h(y))$ nebo $f(g(x) \cdot h(y))$), pak funkce $q_2(x,y) := \frac{\partial^2 (\log |q_1(x,y)|)}{\partial x \partial y}$ je na svém definičním oboru identicky rovna nule.

   Ukažte, že polynom $x^2 + 2\lambda xy + y^2$ je zakuklený součet nebo součin jen pro $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$. **[2]**