Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

2. série - Algebraické metody

nápověda 12.4.2012, odevzdat do 23.4.2012

1. Buď $f(x_1, \ldots, x_n)$ nekonstantní polynom nad tělesem $\mathbb{F}_2$ stupně $d < n$. Ukažte, že $f(v) = 0$ pro alespoň jeden nenulový vektor v s nejvýše $d + 1$ jedničkami. **[2]**

2. Buď $\mathbb{F}$ těleso, $H_1, \ldots, H_m \subseteq \mathbb{F}$ a $H = H_1 \times \cdots \times H_m$.

   (a) Dokažte, že pro každou funkci $f : H \to \mathbb{F}$ existuje polynom $\tilde{f}$ v m proměnných nad $\mathbb{F}$ takový, že:

      (i) $\tilde{f}$ má stupeň $\leq |H_i| - 1$ v i-té proměnné, a

      (ii) restrikce $\tilde{f}$ na H je f. **[1]**

   (b) Je takový polynom jednoznačný? Důkladně zdůvodněte. **[2]**

3. Buď V množina všech ± 1 vektorů délky n. Řekneme, že vektor je *sudý*, pokud obsahuje sudý počet -1, jinak se jedná o vektor *lichý*. Uvažujme multilineární polynom $f(x_1, \ldots, x_n)$ nad $\mathbb{R}$ stupně menšího než $n/2$, tj. $f = \sum_{|S|<n/2} \alpha_S \prod_{i \in S} x_i$, kde $\alpha_S \in \mathbb{R}$.

   (a) Předpokládejme, že $f(v) = 0$ pro každý sudý vektor $v \in V$. Dokažte, že pak nutně $f \equiv 0$, tj. $\alpha_S = 0$ pro každé S. **[4]**

   (b) Platí totéž, pokud $f(v) = 0$ pro každý lichý vektor $v \in V$? **[1]**

4. *Hadamardovou* maticí řádu n rozumíme matici $n \times n$ s hodnotami $1, -1$, jejíž všechny řádky (sloupce) jsou navzájem kolmé. Je dána Hadamardova $n \times n$ matice H a libovolná její $a \times b$ podmatice T. Dokažte, že rozdíl mezi počtem $+1$ a -1 v T je nejvýše $\sqrt{abn}$. **[3]**

5. Mějme $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ nula-jedničkovou matici Q_n, jejíž řádky a sloupce jsou indexovány nenulovými podmnožinami n-prvkové množiny. Prvek na pozici (A, B) je 1 právě tehdy, když $A \cap B \neq \emptyset$. Dokažte, že Q_n je regulární (nad libovolným tělesem). **[3]**