Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série - Polynomy a počítání incidencí II

nápověda 26.3.2012, odevzdat do 2.4.2012

1. Uvažujme nenulový reálný polynom p dvou proměnných, tj.

$$p(x,y) = \sum_{i,j \in \{0,\ldots,n\}} a_{i,j} x^i y^j,$$

kde $a_{i,j} \neq 0$ pro alespoň jednu dvojici (i,j). Dokažte pořádně, že $p(x,y) \neq 0$ pro nějaké $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **[2]**

2. (a) Dokažte, že pro žádný reálný polynom $p(x,y)$ nemůže být množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) \leq 0\}$ čtvercem. **[2]**

   (b) Rozhodněte, zda existuje reálný polynom $p(x,y)$ takový, že množina $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) < 0\}$ je vnitřkem čtverce. **[bonus +2]**

3. Nechť $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je nenulový reálný polynom. Dokažte, že $f(x)$ má nenulový násobek $h(x) = f(x)g(x)$ takový, že všechny nenulové koeficienty $h(x)$ jsou u prvočíselných mocnin x. (např. pro $f(x) = x^2 - x + 5$ je jedním možným řešením $g(x) = x^3 + x^2$). **[3]**

4. Najděte n-bodovou množinu v rovině, která neleží celá na kružnici ani na přímce, takovou, že kružnice určené trojicemi jejích bodů mají nejvýše $O(n)$ různých poloměrů. **[1]**

5. Najděte n-bodovou množinu v rovině, která určuje $\Omega(n^2)$ rovnostranných trojúhelníků. **[2]**

6. Nechť P je n-bodová množina v rovině.

   (a) Je dáno $\alpha \in (0,\pi)$. Ukažte, že P určuje nejvýše $O(n^{7/3})$ trojúhelníků s alespoň jedním úhlem o velikosti α. (Nápověda: rozdělte trojúhelníky ABC s úhlem α při vrcholu A na 2 skupiny podle toho, zda přímka AC obsahuje více než $n^{1/3}$ bodů z P.) **[3]**

   (b) Ukažte, že P určuje nejvýše $O(n^{7/3})$ trojúhelníků s jednotkovým obsahem. **[2]**

   Může se vám hodit cvičení 4a) ze 3. série zimního semestru.

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`