Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

7. série (bonusová)

nápověda pro zájemce 6.2.2012 emailem, odevzdat do 13.2.2012

1. Dokažte, že body $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{d+1}, y_{d+1} \in R^d$ se dají rozdělit na dvě podmnožiny A, B, z nichž každá obsahuje buď x_i nebo y_i, $i = 1, 2 \ldots, d+1$, a konvexní obaly A a B se protínají. [3]

2. Dokažte, že kompaktní konvexní množiny $C_1, \ldots, C_r$ v $\mathbb{R}^d$ mají prázdný průnik právě tehdy, když existují uzavřené poloprostory $H_1, \ldots, H_r$ s prázdným průnikem takové, že $C_i \subseteq H_i$. [2]

3. Dokažte, že počet *neomezených* buněk v arrangementu n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ je $O(n^{d-1})$, pro d pevné. [2]

4. Bod x v konvexní množině $C \subseteq \mathbb{R}^2$ nazveme *extremální*, pokud $x \notin \operatorname{conv}(C \setminus \{x\})$, a *exponovaný*, pokud existuje přímka p taková, že $p \cap C = \{x\}$ a C leží celá v jedné z polorovin určených přímkou p. Najděte v rovině příklad konvexní množiny C s bodem $x \in C$, který je extremální, ale ne exponovaný. [1]

5. (a) Mějme soubor konvexních množin v rovině $C_1, \ldots, C_n$, $n \geq 4$. Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku, potom také průnik všech $C_1, \ldots, C_n$ obsahuje polopřímku. [4]

   (b) Najděte 6 navzájem různých konvexních množin v rovině $C_1, \ldots, C_6$ takových, že průnik každé trojice z $C_1, \ldots, C_6$ obsahuje polopřímku, ale průnik všech $C_1, \ldots, C_6$ polopřímku neobsahuje. [2]