Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

6. série - Voroného diagramy a arrangementy

nápověda 3.1.2012, odevzdat do 9.1.2012

1. Pořádně dokažte, že region $reg(p)$ bodu p ve Voroného diagramu konečné množiny bodů $P \subset \mathbb{R}^d$ je neomezený právě tehdy, když p leží na hranici $\text{conv}(P)$. **[2]**

2. Ukažte, že Voroného diagram $2n$-bodové množiny $A_{2n} := \{(i, 0, 0) : i = 1, 2 \dots n\} \cup \{(0, n, j) : j = 1, 2 \dots n\}$ v $\mathbb{R}^3$ má alespoň cn^2 vrcholů, kde c je nějaká kladná konstanta. **[3]**

3. Nechť P je konečná množina bodů v rovině, z nichž žádné 3 neleží na společné přímce a žádné 4 na společné kružnici. Definujme na P graf DT (zvaný *Delaunayova triangulace*): dva body a, b jsou spojeny hranou, právě když existuje kruh mající a i b na hranici a žádný bod z P uvnitř.

   (a) Dokažte, že DT je pseudotriangulace — rovinný graf, jehož každá stěna kromě vnější je trojúhelník. **[3]**

   (b) Dokažte, že DT je duální graf ke grafu Voroného diagramu množiny P. **[3]**

   (c) Nechť T je minimální kostra v úplném grafu na P, kde váhy hran jsou vzdálenosti bodů. Dokažte, že $T \subseteq DT$. **[2]**

4. Kolik je d-dimenzionálních buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají rovnicím $\{x_i = x_j\}$, kde $1 \le i < j \le d$? **[2]**

5. Nechť $P = \{p_1, p_2 \dots p_n\}$ je množina bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodě x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   (a) Ukažte, že maximální počet různých "výhledů" je $O(n^4)$. **[2]**

   (b) Ukažte, že odhad v předchozím bodě nelze obecně zlepšit. **[4]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`