

# Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

## 5. série - Mnohostěny

náповěda 12.12.2011, odevzdat do 19.12.2011

1. Uvažujme kompaktní konvexní  $d$ -rozměrný mnohostěn  $P$ . S použitím definice stěny z přednášky pořádně dokažte, že průnik dvou stěn  $P$  je stěna  $P$ . [2]
2. Spočítejte přesný počet stěn všech dimenzí pro cyklický mnohostěn dimenze 4. [2]
3. (Zobecnění Erdősovy-Szekeresovy věty na  $d$ -rozměrné cyklické mnohostěny)
  - (a) Nechť  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou body v  $\mathbb{R}^d$ . Vektory  $y_i \in \mathbb{R}^{d+1}$  získáme přidáním nové složky s hodnotou 1 za poslední složku vektoru  $x_i$ . Body  $x_i$  byly zvoleny tak, že pro libovolnou volbu indexů  $i_1 < i_2 < \dots < i_{d+1}$  je determinant matice se sloupci  $y_{i_1}, \dots, y_{i_{d+1}}$  vždy kladný. Dokažte, že mnohostěn, který je konvexním obalem bodů  $x_1, \dots, x_n$ , je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [4]
  - (b) Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel  $n, d$  existuje  $N$  takové, že z každých  $N$  bodů v obecné poloze v  $\mathbb{R}^d$  lze vybrat  $n$  bodů, jejichž konvexní obal je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [3]
4. Dokažte, že každý mnohostěn  $P \subset \mathbb{R}^d$  je kolmou projekcí nějakého  $k$ -rozměrného pravidelného simplexu v  $\mathbb{R}^n$ , pro vhodná  $k, n$ . (Kolmou projekcí rozumíme zobrazení  $\pi$  z prostoru  $\mathbb{R}^n$  na podprostor  $M \cong \mathbb{R}^d$  vnořený v  $\mathbb{R}^n$  takové, že pro každé  $x \in \mathbb{R}^n$  je vektor  $\pi(x) - x$  kolmý na  $M$ .) [4]

---

Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/kvg>