Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

3. série - Počítání incidencí

nápověda 14.11.2011, odevzdat do 21.11.2011

1. Nechť $I_{1\mathrm{circ}}(n,m)$ označuje maximální počet incidencí mezi n body a m jednotkovými kružnicemi v rovině. Ukažte, že $I_{1\mathrm{circ}}(n,n) = O(n^{4/3})$. **[3]**

2. Mějme systém množin $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots M_n\}$ nad n-prvkovou množinou N (tj. $\forall i : M_i \subseteq N$), z nichž každé dvě mají nejvýše jeden společný prvek. Počtem incidencí mezi N a $\mathcal{M}$ budeme rozumět $I(N, \mathcal{M}) := \sum_{i=1}^{n} |M_i|$. Rozhodněte, zda musí platit $I(N, \mathcal{M}) = O(n^{4/3})$. **[2]**

3. Najděte n-bodovou množinu v $\mathbb{R}^4$ s $\Omega(n^2)$ jednotkovými vzdálenostmi. **[3]**

4. Nechť P je n-bodová množina v rovině.

   (a) Ukažte, že maximalní možný počet přímek takových, že každá z nich obsahuje alespoň $k > 1$ bodů P, je $O(n^2/k^3 + n/k)$ a že maximální počet incidencí těchto přímek s množinou P je $O(n^2/k^2 + n)$. **[3]**

   (b) Nechť $0 < k \leq \sqrt{n}$ je celočíselný parametr. Ukažte, že nejvýše $O(n^2/k)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně k a nejvýše $\sqrt{n}$ bodů P. Podobně pro $K > \sqrt{n}$ ukažte, že nejvýše $O(Kn)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně $\sqrt{n}$ a nejvýše K bodů P. **[4]**

   (c) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že libovolná n-bodová množina $P \subseteq \mathbb{R}^2$, která neobsahuje alespoň cn bodů ležících v přímce, musí svými body určovat nejméně cn^2 různých přímek. **[2]**

   (d) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že každá n-bodová množina P, jejíž body neleží na jedné přímce, obsahuje bod, kterým prochazí nejméně cn různých přímek určených body P. **[1]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`