Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

2. série - Věty Hellyho typu

nápověda 31.10.2011, odevzdat do 7.11.2011

1. Nechť $C_1, \dots, C_n$ je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a nechť K je kompaktní podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z $C_1, \dots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K, potom také průnik všech $C_1, \dots, C_n$ obsahuje posunutou kopii K. **[2]**

2. (a) Mějme $r < \frac{\pi}{3}$ a množinu A aspoň tří bodů na sféře takovou, že každou trojici bodů z A lze pokrýt sférickým diskem o poloměru r. Dokažte, že lze všechny body z A pokrýt sférickým diskem o poloměru r. **[4]**

   Dokážete nahradit $\frac{\pi}{3}$ větším úhlem? (Za každých 5 stupňů navíc [**bonus 1 bod**]).

   Sféra je hranice koule v $\mathbb{R}^3$. *Sférický disk* se středem v x a poloměrem r je množina bodů sféry, které jsou při pohledu ze středu koule v úhlové vzdálenosti nejvýše r od x.

   (b) Dokažte, že v části (a) nelze $r < \frac{\pi}{3}$ nahradit $r < \frac{\pi}{2}$. **[2]**

3. Mějme konečné množiny bodů $A_1, \dots, A_k$ v $\mathbb{R}^d$, přičemž $k \leq d$. Dokažte, že existuje afinní podprostor $\mathbb{R}^d$ dimenze $k-1$ takový, že každá nadrovina, která jej obsahuje, dělí každou A_i na dvě části o velikosti alespoň $|A_i|/(d+1)$. **[2]**

4. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p,q)-vlastnost, pokud $n \geq p$ a z každé p-tice z $\mathcal{C}$ lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost $s(\mathcal{C})$ souboru množin $\mathcal{C}$ je velikost nejmenší množiny bodů X takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň 1 bod z X.

   (a) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s $(2,2)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) = 1$. **[1]**

   (b) Dokažte, že je-li $\mathcal{C}$ konečný soubor osových obdélníků se $(4,3)$-vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. **[3]**

   (c) Najděte soubor $\mathcal{C}$ několika osových obdélníků s $(3,2)$-vlastností, pro který $s(\mathcal{C}) = 3$. **[2]**

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`