Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

4. série

nápověda 5.5.2010, odevzdat do 10.5.2010

Davenport-Schinzelovy posloupnosti

Maximální možnou délku Davenport-Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, 3, \ldots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. Složitost buňky arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů a hran ležících na hranici buňky.

1. Pěstovaný strom je zakořeněný strom s pevně daným rovinným nakreslením (tj. každý vrchol má pevně určené pořadí svých synů). Takovýto strom R obejdeme z kořene okolo vnější stěny. Vrcholy očíslujeme $1, \ldots, n$ podle okamžiku první návštěvy. Během průchodu pěstovaným stromem R na n vrcholech si píšeme čísla navštívených vrcholů a získáme tak posloupnost p_R délky $2n - 1$.
   (a) Dokažte, že p_R je DS-posloupnost řádu 2. **[1]**
   (b) Dokažte, že každá DS-posloupnopst p řádu 2 nad n symboly a délky $2n - 1$ jednoznačně určuje rovinný zakořeněný strom R, pro který $p_R = p$. **[3]**
   (c) Dokažte, že každá DS-posloupnost řádu 2 nad n symboly (ne nutně délky $2n-1$) se dá reprezentovat jako dolní obálka n-tice parabol. **[2]**

2. Složitost jedné buňky arrangementu úseček
   Nechť C je buňka arrangementu n úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.
   (a) Úsečky očíslujeme čísly 1 až n. Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky C, počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost *ababab*, a tedy složitost buňky C je $O(\lambda_4(n))$. **[3]**
   (b) Najděte příklad, kde se v posloupnosti z první části příkladu vyskytuje *ababa* (a to bez ohledu na volbu počátečního vrcholu). **[1]**
   (c) Dokažte, že složitost buňky C je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. **[3]**

3. Věta o zóně přes Davenport-Schinzelovy posloupnosti
   Zóna přímky p v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí p. Dokažte, že zóna jedné přímky v arrangementu n přímek v rovině má složitost $O(n)$. **[3]**

4. Nechť $g_1, g_2, \ldots, g_m$ jsou grafy m spojitých po částech lineárních funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, které se dohromady skládají z n úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka $g_1, g_2, \ldots, g_m$ má složitost $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$. Konkrétně pro $m = O(1)$ je složitost dolní obálky lineární. **[2]**

5. Nechť $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ je matice $n \times n$ složená z nul a jedniček neobsahující podmatici tvaru
   $$\begin{pmatrix} 1 & * & 1 & * \\ * & 1 & * & 1 \end{pmatrix}$$
   To je, že neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_3} = a_{i_2 j_4} = 1$.
   (a) Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_s(n) + O(n)$, kde s je vhodná konstanta. **[1]**
   (b) Dokažte, že počet jedniček v matici A je nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$. **[2]**