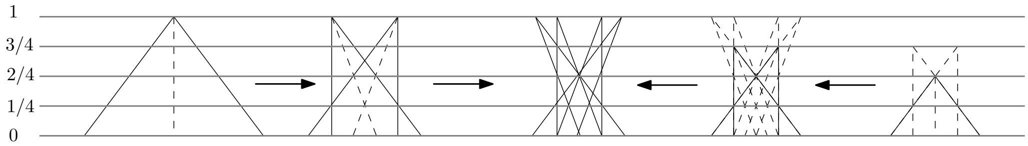
Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

3. série - Kakeyovy množiny

nápověda 14.4.2010, odevzdat do 19.4.2010

1. Dokažte, že množina F_m zkonstruovaná z rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s výškou 1 operacemi 2-ztenčení ve výškách $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-2}{m}$ má obsah $O(1/m)$.

   Návod: Můžete například dokázat, že množinu F_m lze zkonstruovat "odspodu" v $m-2$ krocích. V i-tém kroku máme sjednocení 2^{i-1} trojúhelníků výšky $\frac{i+1}{m}$; z každého takového trojúhelníku vytvoříme dva trojúhelníky výšky $\frac{i+2}{m}$. Viz obrázek.



Obrázek 1: Zleva: 2-ztenčení ve výškách 1/4 a 2/4. Zprava: postup z návodu.

[3]

2. Dokažte, že úsečku délky 1 nelze v rovině otočit o 360° na množině míry 0.

   Návod: Dokažte, že každá množina, na které lze úsečku otočit, nutně obsahuje kruh s kladným poloměrem. Využijte stejnoměrné spojitosti spojitých funkcí na kompaktní množině. **[3]**

3. (Konstrukce Kakeyovy množiny míry 0)

   Množina F se nazývá *zubatá*, je-li sjednocením k trojúhelníků s výškou 1 a základnou délky $2/k$, obsahuje jednotkovou úsečku v každém směru z intervalu $[45°, 135°]$ a leží v pásu $\{(x, y); 0 \leq y \leq 1\}$.

   (a) Ukažte, že pro každé $\varepsilon > 0, \delta > 0$ a pro každou zubatou množinu F existuje zubatá množina $F' \subseteq F(\varepsilon)$ míry menší než δ, kde $F(\varepsilon)$ značí ε-okolí množiny F, tedy $F(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists z \in F \, |x - z| < \varepsilon\}$. **[2]**

   (b) Sestrojte posloupnost zubatých množin F_n a posloupnost kladných čísel ε_n takových, že $F_n(\varepsilon_n) \subseteq F_{n-1}(\varepsilon_{n-1})$ a míra F_n je menší než $1/2^n$. S pomocí této posloupnosti zkonstruujte Kakeyovu množinu míry 0. **[2]**