Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

2. série - Incidence bodů a křivek, hranová expanze

nápověda 7.4.2010, odevzdat do 12.4.2010

1. (Zjednodušená Szemerédiho-Trotterova věta pro křivky.) Nechť C je množina n křivek v $\mathbb{R}^2$ splňující následující vlastnosti: (i) každou k-ticí bodů z $\mathbb{R}^2$ prochází nejvýše s křivek a (ii) každě dvě křivky se protínají v nejvýše s bodech. Dále nechť P je množina m bodů z $\mathbb{R}^2$, z nichž každý leží na stejném počtu křivek z C; tento počet budeme značit d. Předpokládejme, že každá křivka z C prochází alespoň k body z P.

   (a) Sestrojme multigraf G, jehož vrcholy jsou body P a každá křivka $\gamma \in C$ přidá hrany mezi dvojicemi bodů, které obsahuje a mezi nimiž na této křivce leží nejvýše $k-2$ jiných bodů. O těchto dvojících budeme říkat, že si jsou *blízké podél* γ.

   Zafixujme bod $p \in P$. Řekneme, že bod $q \in P$ je *špatný*, pokud mezi p a q vede alespoň $c(k,s)d^{1-1/(k-1)}$ hran. Křivka $\gamma \in C$ procházející bodem p je *špatná*, pokud všechny body, které jsou blízké p podél γ, jsou špatné. Dokažte, že, pokud vhodně zvolíme konstantu $c(k,s)$ závisející pouze na k a s, bude nejvýše polovina křivek špatných. **[3]**

   (b) Pro vhodnou konstantu $c(k,s)$ závisející pouze na k a s dokažte, že alespoň $1/(4k)$ všech hran grafu G má méně než $c(k,s)d^{1-1/(k-1)}$ hran s ní paralelních. **[1]**

   (c) Dokažte, že pro každé k a s existuje konstanta $c'(k,s)$ taková, že počet incidencí mezi křivkami z C a body z P je nejvýše

   $$I(P,C) \leq c'(k,s)\left(m^{k/(2k-1)}n^{(2k-2)/(2k-1)} + m + n\right).$$

   Může se hodit výsledek části (b) a průsečíkové lemma pro multigrafy. **[4]**

   (d) Dokažte, že tvrzení z části (c) platí, i pokud nebudeme požadovat, aby každá křivka z C procházela alespoň k body z P. **[1]**

2. Nechť $G = (V,E)$ je r-regulární graf, A jeho matice sousednosti a λ_2 druhé největší vlastní číslo A. Definujme hranovou expanzi G jako

   $$\Phi(G) = \min\left\{\frac{E(X, V\setminus X)}{|X|}; X \subset V, 1 \leq |X| \leq \frac{|V|}{2}\right\}.$$

   (a) Dokažte, že pro každý reálný vektor $x = (x_v)_{v\in V}$ splňující $\sum_{v\in V} x_v = 0$ platí $x^T A x \leq \lambda_2 ||x||_2^2$. **[2]**

   (b) Dokažte, že

   $$\Phi(G) \geq \frac{r-\lambda_2}{2}.$$

   (Použijte část (a) na vhodný vektor s nulovým součtem souřadnic.) **[2]**