Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie II

1. série - Počítání incidencí II

nápověda 17.3.2010, odevzdat do 22.3.2010

1. Nechť P je m-bodová množina v rovině.

   (a) Nechť $k \leq \sqrt{m}$ je kladný celočíselný parametr. Ukažte, že nejvýše $O(m^2/k)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně k a nejvýše $\sqrt{m}$ bodů P. Podobně pro $K > \sqrt{m}$ ukažte, že nejvýše $O(Km)$ dvojic bodů z P leží na přímkách, které obsahují nejméně $\sqrt{m}$ a nejvýše K bodů P. (Můžete použít příklad 4a ze 3. série zimního semestru.) **[4]**

   (b) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že libovolná m-bodová množina $P \subseteq \mathbb{R}^2$, která neobsahuje alespoň cm bodů ležících v přímce, musí svými body určovat nejméně cm^2 různých přímek. **[2]**

   (c) Ukažte, že existuje reálná konstanta $c > 0$ taková, že každá m-bodová množina P, jejíž body neleží na jedné přímce, obsahuje bod, kterým prochází nejméně cm různých přímek určených body P. **[1]**

2. Najděte n-bodovou množinu v rovině, která neleží celá na kružnici ani na přímce, takovou, že kružnice určené trojicemi jejích bodů mají nejvýše $O(n)$ různých poloměrů. **[1]**

3. (a) Najděte n-bodovou množinu v rovině, která určuje $\Omega(n^2)$ rovnostranných trojúhelníků. **[2]**

   (b) Dívejme se na $\mathbb{R}^2$ jako na komplexní rovinu $\mathbb{C}$ a nechť $\omega = e^{2\pi i/5}$ značí pátou odmocninu z jedničky. Definujme pětiúhelníkovou mřížku velikosti m jako

   $$P_m = \{i_0 + i_1\omega + i_2\omega^2 + i_3\omega^3 : i_0, i_1, i_1, i_3 \in \mathbb{Z}, |i_j| \leq m\}.$$

   Dokažte, že se P_m skládá z $n = O(m^4)$ bodů a že obsahuje $\Omega(n^2)$ pravidelných pětiúhelníků. **[3]**

4. (Průsečíkové lemma pro multigrafy)

   (a) Pro $k \geq 1$ a graf H označme $k \cdot H$ multigraf, který vznikne z H nahrazením každé hrany k paralelními hranami. Dokažte, že

   $$\mathrm{CR}(k \cdot H) = k^2 \cdot \mathrm{CR}(H).$$

   [1]

   (b) Nechť G je multigraf s n vrcholy, e hranami a maximální násobností M. Dokažte, že pokud je $e \geq 5Mn$, pak

   $$\mathrm{CR}(G) \geq \frac{e^3}{c \cdot M \cdot n^2}.$$

   Návod: rozdělte hrany na $\log(M)$ skupin podle násobnosti a odhadněte průsečíkové číslo pro každou skupinu zvlášť (pomocí průsečíkového lemmatu pro grafy). Nakonec použijte Hölderovu nerovnost s parametry $p = 3$ a $q = 3/2$. **[3]**
