Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie I

8. (bonusová) série

příklady z této série se nepočítají do maximálního počtu bodů ani do nutné čtvrtiny na zápočet

nápověda 11.1.2010, odevzdat do 18.1.2010

Půlící přímky

1. (Lovászovo lemma v rovině) Nechť X je množina $2n$ bodů v rovině v obecné poloze a l je svislá přímka taková, že k bodů X leží nalevo od l a $2n-k$ bodů napravo, přičemž $k \leq n$. Dokažte, že l kříží přesně k půlících hran. **[3]**

2. (a) S využitím odhadu z prvního příkladu, tj. že počet půlících hran křížících svislou přímku je $O(n)$, dokažte, že maximální počet půlících hran n-bodové množiny v rovině je $O(n^{3/2})$. **[2]**

   (b) Najděte n bodů a $\Omega(n^{3/2})$ hran mezi dvojicemi těchto bodů tak, aby žádná přímka neprotťala více než n hran. **[1]**

3. Nechť X je konečná množina bodů v obecné poloze v rovině. k-díra je k-bodová konvexně nezávislá podmnožina X taková, že conv(D)$\cap X = D$. Dokažte:

   (a)
   $$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot \#k\text{-děr} = -1$$
   [2]

   (b)
   $$\sum_{k=1}^{|X|} (-1)^k \cdot k \cdot \#k\text{-děr} = -\#\text{bodů uvnitř conv}(X)$$
   [3]

   Nápověda: posouvání bodů po křivkách do vhodné konfigurace.