Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

7. série - Arrangementy

nápověda 4.1.2010, odevzdat do 11.1.2010

1. Spočtěte počet stěn dimenzí 1 a 2 arrangementu n rovin v obecné poloze v $\mathbb{R}^3$. **[2]**

2. Dokažte, že počet *neomezených* buněk v arrangementu n nadrovin v $\mathbb{R}^d$ je $O(n^{d-1})$, pro d pevné. **[2]**

3. Kolik je d-dimenzionálních buněk v arrangementu $\binom{d}{2}$ nadrovin v $\mathbb{R}^d$, které odpovídají rovnicím $\{x_i = x_j\}$, kde $1 \leq i < j \leq d$? **[3]**

4. Nechť $P = \{p_1, p_2 \ldots p_n\}$ je množina bodů v rovině. Řekneme, že body x a y mají *stejný výhled* na P, jestliže jsou z nich body P vidět ve stejném cyklickém pořadí (tj. jestliže otáčíme polopřímkou s počátkem v bodě x resp. y po směru hodinových ručiček, tato přímka nachází body P ve stejném pořadí). Předpokládejme, že ani jeden z bodů x a y nepatří do P a neprochází jimi žádná přímka určená dvěma body z P.

   (a) Ukažte, že maximální počet různých "výhledů" je $O(n^4)$. **[2]**

   (b) Ukažte, že odhad v předchozím bodě nelze obecně zlepšit. **[5]**

5. (Průnikové grafy) Nechť S je množina n geometrických útvarů v rovině. Průnikový graf S je graf na n vrcholech, které odpovídají útvarům. Dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když jim odpovídající útvary mají neprázdný průnik.

   (a) Všech grafů na n vrcholech je $2^{\binom{n}{2}} = 2^{n^2/2+O(n)}$. Dokažte, že průnikových grafů n úseček v rovině je jenom $2^{O(n \log n)}$. (Pozor na kolineární úsečky!) Použijte větu o počtu znaménkových kombinací. **[3]**

   (b) Dokažte, že průnikových grafů n křivek v rovině je alespoň $2^{\Omega(n^2)}$. Pokud chcete, můžete místo pro n křivek řešit úlohu pro n konvexních množin. **[3]**
