Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

5. série - Mnohostěny

nápověda 7.12.2009, odevzdat do 14.12.2009

1. Uvažujme kompaktní konvexní d-rozměrný mnohostěn P. S použitím definice stěny z přednášky dokažte:

   (a) Průnik dvou stěn P je stěna P. [2]

   (b) Každá nejvýše $(d-1)$-dimenzionální stěna P je průnikem všech faset P, ve kterých je obsažena. [2]

2. Spočítejte přesný počet stěn všech dimenzí pro cyklický mnohostěn dimenze 4 a 5. [3]

3. (Zobecnění Erdősovy-Szekeresovy věty na d-rozměrné cyklické mnohostěny)

   (a) Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou body v $\mathbb{R}^d$. Vektory $y_i \in \mathbb{R}^{d+1}$ získáme přidáním nové složky s hodnotou 1 za poslední složku vektoru x_i. Body x_i byly zvoleny tak, že pro libovolnou volbu indexů $i_1 < i_2 < \cdots < i_{d+1}$ je determinant matice se sloupci $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{d+1}}$ vždy kladný. Dokažte, že mnohostěn, který je konvexním obalem bodů $x_1, \ldots, x_n$, je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [4]

   (b) Dokažte, že pro každou dvojici přirozených čísel n, d existuje N takové, že z každých N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$ lze vybrat n bodů, jejichž konvexní obal je kombinatoricky ekvivalentní cyklickému mnohostěnu. [3]

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo d existuje N takové, že pro každou N-bodovou množinu M v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$ lze vybrat $d+1$ simplexů dimenze d s vrcholy v M tak, že žádná nadrovina neprotne všech $d+1$ simplexů najednou. Použijte předchozí úlohu. [3]