Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

4. série - Dualita a mnohostěny

nápověda 30.11.2009, odevzdat do 7.12.2009

1. Ukažte, že pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{R}^d$ je $(X^*)^*$ rovno uzávěru $\mathrm{conv}(X \cup \{0\})$. [2]

2. Pro množinu $C \subseteq \mathbb{R}^d$ ukažte, že $C = C^*$ právě tehdy, když C je uzavřená jednotková koule se středem v počátku. [2]

3. Uvažme n úseček v rovině takových, že jejich prodloužení prochází počátkem, ale žádná z těchto úseček počátek neobsahuje. Ukažte, že když každé 3 z nich lze protnout přímkou, pak všech n úseček lze protnout jednou přímkou. (Protnout znamená mít společný alespoň jeden bod, tj. přímka obsahující úsečku ji i protíná.) [3]

4. Bod x v konvexní množině $C \subseteq \mathbb{R}^2$ nazveme *extremální*, pokud $x \notin \mathrm{conv}(C \setminus \{x\})$, a *exponovaný*, pokud existuje přímka p taková, že $p \cap C = \{x\}$ a C leží celá v jedné z polorovin určených přímkou p. Najděte v rovině příklad konvexní množiny C s bodem $x \in C$, který je extremální, ale ne exponovaný. [2]

5. Dokažte, že každý polytop $P \subset \mathbb{R}^d$ je kolmou projekcí nějakého k-rozměrného pravidelného simplexu v $\mathbb{R}^n$, pro vhodná k, n. (Kolmou projekcí rozumíme zobrazení π z prostoru $\mathbb{R}^n$ na podprostor $M \cong \mathbb{R}^d$ vnořený v $\mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\pi(x) - x$ kolmý na M.) [4]

Informace o cvičení naleznete na `http://kam.mff.cuni.cz/kvg`