

Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie

2. série - Věty Hellyho typu

nápověda 26.10.2009, odevzdat do 2.11.2009

1. Nechť C_1, \dots, C_n je soubor (alespoň tří) konvexních množin v rovině a nechť K je kompaktní podmnožina roviny. Ukažte, že pokud průnik každé trojice množin z C_1, \dots, C_n obsahuje posunutou kopii K , potom také průnik všech C_1, \dots, C_n obsahuje posunutou kopii K . [2]
2. (a) Mějme soubor konvexních množin v rovině C_1, \dots, C_n , $n \geq 4$. Ukažte, že pokud průnik každé čtveřice z C_1, \dots, C_n obsahuje polopřímku, potom také průnik všech C_1, \dots, C_n obsahuje polopřímku. [4]
(b) Najděte 6 navzájem různých konvexních množin v rovině C_1, \dots, C_6 takových, že průnik každé trojice z C_1, \dots, C_6 obsahuje polopřímku, ale průnik všech C_1, \dots, C_6 polopřímku neobsahuje. [2]
3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je kompaktní (ne nutně souvislá) množina o ploše $S(M) > 0$. Dokažte, že existuje bod $x \in \mathbb{R}^2$ takový, že libovolná přímka jím procházející dělí množinu M na dvě části o ploše alespoň $S(M)/3$. (Můžete předpokládat, že M je sjednocením konečně mnoha mnohoúhelníků). [3]
4. Řekneme, že soubor $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ konvexních množin v rovině má (p, q) -vlastnost, pokud $n \geq p$ a z každé p -tice z \mathcal{C} lze vybrat q množin s neprázdným průnikem. Špendlíkovost $s(\mathcal{C})$ souboru množin \mathcal{C} je velikost nejmenší množiny bodů X takové, že každé $C_i \in \mathcal{C}$ obsahuje alespoň 1 bod z X .
 - (a) Dokažte, že je-li \mathcal{C} konečný soubor osových obdélníků (tj. uzavřených obdélníků s hranami rovnoběžnými s osami) s $(2, 2)$ -vlastností, pak $s(\mathcal{C}) = 1$. [1]
 - (b) Dokažte, že je-li \mathcal{C} konečný soubor osových obdélníků se $(4, 3)$ -vlastností, pak $s(\mathcal{C}) \leq 2$. [3]
 - (c) Najděte soubor \mathcal{C} několika osových obdélníků s $(3, 2)$ -vlastností, pro který $s(\mathcal{C}) = 3$. [2]

Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/kvg>